

УДК 51(075.8)  
ББК 22.162я73  
С 91

**Рецензенты:**

доктор физ.-мат. наук, профессор,  
зав. кафедрой математического анализа ТГПИ **Илюхин А. А.**;  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
зав. кафедрой физики ТТИ ЮФУ **Куповых Г. В.**

*Учебное пособие подготовлено и издано в рамках  
национального проекта «Образование»  
по «Программе развития федерального государственного образовательного  
учреждения «Южный федеральный университет» на 2007–2010 гг.»*

Сухинов А. И., Фирсов И. П.  
С 91 Лекции по функциональному анализу: учеб. пособие /  
А. И. Сухинов, И. П. Фирсов. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ,  
2009. – 189 с.

ISBN 978-5-9275-0671-2

Пособие состоит из семи глав. В первой из них дается мера и интеграл Лебега на линейном множестве. Во второй излагаются основные понятия топологического пространства. В третьей рассматриваются свойства метрических пространств. В частности полнота и пополнение, принцип сжимающих отображений, компактность и предкомпактность. В четвертой главе рассматриваются свойства топологических линейных пространств,

в частности нормированные и локально выпуклые пространства, гильбертовы пространства, ряды Фурье. В пятой и шестой главах рассматриваются пространства линейных операторов и функционалов, сопряженные пространства и операторы, спектр оператора. Последняя глава посвящена пространствам с мерой.

Пособие содержит многочисленные примеры.

Предназначено для студентов второго курса ТТИ ЮФУ специальности 010500 «Прикладная математика и информатика» и студентов других специальностей, у которых программой предусмотрен этот курс.

ISBN 978-5-9275-0671-2

УДК 51(075.8)  
ББК 22.162я73

© ТТИ ЮФУ, 2009  
© А.И. Сухинов, И.П. Фирсов, 2009  
© Южный федеральный  
университет, 2009

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| I. ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.....                       | 5   |
| 1. Отношение. Отношение эквивалентности.....   | 5   |
| 2. Отображение .....   | 8   |
| 3. Упорядоченные множества .....   | 10  |
| 4. Строение линейного множества.....   | 13  |
| 5. Мера Лебега линейного множества .....   | 14  |
| 6. Свойства меры Лебега. Критерий измеримости .....                                      | 19  |
| 7. Измеримые функции. Свойства измеримых функций .....                                   | 24  |
| 8. Понятие интеграла Лебега. Основные свойства .....                                     | 26  |
| II. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА .....  | 32  |
| 1. Понятие топологического пространства. Примеры.....                                    | 32  |
| 2. Окрестность и замыкание в топологическом пространстве. Топология подпространства..... | 35  |
| 3. База топологии. Аксиомы счётности.....  | 39  |
| 4. Предел последовательности в топологическом пространстве. Аксиомы отделимости.....     | 42  |
| 5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм топологических пространств.....                 | 46  |
| 6. Компактность в топологических пространствах.....                                      | 49  |
| III. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА .....  | 53  |
| 1. Замечательные неравенства.....  | 53  |
| 2. Примеры метрических пространств .....   | 56  |
| 3. Открытый шар. Топология метрического пространства. Метризуемость .....                | 60  |
| 4. Полнота метрического пространства. Примеры .....                                      | 65  |
| 5. Теорема о вложенных шарах.....  | 72  |
| 6. Теорема Бэра о категориях .....   | 76  |
| 7. Принцип сжимающих отображений и его приложения .....                                  | 79  |
| 8. Пополнение метрических пространств .....  | 86  |
| 9. Компактность в метрических пространствах .....  | 91  |
| 10. Предкомпактность в метрических пространствах. Теоремы Хаусдорфа и Арцела .....       | 96  |
| IV. ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.....  | 100 |
| 1. Понятие топологического векторного пространства.....                                  | 100 |
| 2. Нормированные и топологические нормированные пространства.....                        | 103 |

|  |     |
|--|-----|
| 3. Полунормы и локально выпуклые топологические пространства.....  | 106 |
| 4. Пространства со скалярным произведением. Гильбертово пространство.....                                  | 110 |
| 5. Задача о наилучшем приближении. Ортогональное дополнение.....   | 116 |
| 6. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве .....  | 120 |
| V. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.....   | 124 |
| 1. Примеры линейных операторов. Ограниченность и непрерывность оператора .....                             | 124 |
| 2. Пространство линейных ограниченных операторов. Норма оператора .....                                    | 129 |
| 3. Равномерная и сильная сходимости операторов. Ряды операторов .....                                      | 133 |
| 4. Обратимость линейного оператора .....   | 136 |
| 5. Основные теоремы функционального анализа .....  | 138 |
| VI. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ.....  | 142 |
| 1. Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха.....  | 142 |
| 2. Примеры сопряжённых пространств. Теорема Рисса.....   | 146 |
| 3. Сильная и слабая сходимости. Рефлексивность .....   | 149 |
| 4. Обобщённые функции.....   | 152 |
| 5. Сопряжённые и самосопряжённые операторы.....  | 156 |
| 6. Компактные операторы.....   | 160 |
| 7. Разрешимость уравнения $(A - \lambda J)x = y$ . Понятие спектра и резольвенты линейного оператора ..... | 163 |
| 8. Свойства резольвенты и спектра.....   | 168 |
| VII. ПРОСТРАНСТВА С МЕРОЙ .....  | 170 |
| 1. Мера в абстрактных множествах .....   | 170 |
| 2. Пространства с мерой. Сходимость почти всюду и по мере .....  | 173 |
| 3. Интеграл Лебега в $R^n$ .....   | 176 |
| 4. Пространства $S$ и $L_p$ .....  | 179 |
| 5. Ряды Фурье в $L_2$ .....  | 182 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....   | 185 |