МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель
Ж. И. Бахтина

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Содержание

3) $\rho_2(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$;

4) $\rho_3(x,y)=\begin{cases}1, x\neq y,\\ 0, x=y;\end{cases}$

5) $\rho_4(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y), \rho(x,y)<1,\\ 1, \rho(x,y)\geq 1.\end{cases}$

3. Пространство $l^2=(X,\rho)$, где $X=\{(x_1,x_2,..,x_n,...)\forall n\geq 1: x_n\in R\}$ – пространство бесконечных числовых последовательностей, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ сходится; для $\forall x,y\in l^2:\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$.

Проверку условий 1) - 3) можно выполнить в качестве упражнения.

4. Пространство $C[a,b]=(X,\rho)$, где X – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, а ρ задается следующим образом:

$$\rho(x,y):=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|, \forall x(t),y(t)\in X.$$

Свойства 1) – 3) метрики $\rho(x,y)$ легко проверить.

Всюду плотные и совершенные множества

Определение. Пусть A и B – два множества в метрическом пространстве X. Множество A называется ***плотным*** в B, если $B\subset\overline{A}$ (здесь $\overline{A}$ – замыкание множества A). Множество A называется ***всюду плотным*** в X, если $\overline{A}=X$.

Свойство «всюду плотности» обладает «транзитивностью»: если множество A всюду плотно в пространстве M, а M в свою очередь всюду плотно в более широком пространстве P, то A, рассматриваемое как подмножество P, всюду плотно в P.

Определение. Пространства, в которых имеются счетные всюду плотные множества, называются ***сепарабельными***.

Рассмотренные выше метрические пространства являются сепарабельными. Так, в R^n счетным всюду плотным множеством является множество точек, у которых координаты – рациональные числа. В пространстве $C[a,b]$ таким множеством является множество многочленов с рациональными коэффициентами, а в пространстве l^2 – множества последовательностей рациональных чисел, в которых отлично от нуля лишь конечное, свое для каждой последовательности, число членов.

Определение. Множество A называется ***нигде не плотным*** в метрическом пространстве X, если любое открытое множество этого пространства содержит другое открытое множество, целиком свободное от точек множества A.

Например, в пространстве $C[0,1]$ множество A функций вида $y(x)=nx^2$ (n – целые числа) нигде не плотно. Другой пример – «канторово совершенное множество». Напомним следующее определение.

Определение. Множество A, расположенное в метрическом пространстве, называется ***совершенным***, если оно замкнуто и если каждая точка множества A является его предельной точкой.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Доказать, что $\rho(x,y)=min\{1;|x-y|\}$ – метрика на R.

2. Доказать, что каждая из функций

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - y_i\right|, d_2(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left|x_i - y_i\right|$$

в пространстве R^n является метрикой.

3. Доказать, что для любых элементов x, y, u и v из метрического пространства выполняется неравенство четырехугольника

$$|\rho(x,u) - \rho(y,v)|\le\rho(x,y)+\rho(u,v).$$

4. Ввести на числовой прямой метрику по формуле

$$\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|.$$

Проверить выполнение всех аксиом метрического пространства. Будет ли это пространство полным?

5. Рассмотреть три пространства функций на прямой:

а) всех ограниченных непрерывных функций;

б) всех непрерывных функций, у которых $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$;

в) всех непрерывных функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого интервала.

В этих пространствах вводится метрика по формуле

$$\rho(f,g)=\sup_x|f(x)-g(x)|.$$

Будут ли указанные пространства полными?

6. Выписать определения метрик (см., например, [7]):

1) метрика Хаусдорфа;

2) метрика Фреше-Никодима;

3) чебышевская метрика.

3. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Важным классом линейных метрических пространств является класс линейных нормированных пространств.

Понятие нормированного пространства – одно из самых основных понятий функционального анализа. Теория нормированных пространств была построена, главным образом, С. Банахом в 20-х годах 20 века.

Сначала напомним определение линейного пространства.

Определение. ***Линейным пространством*** называется совокупность L элементов $x, y, \ldots$, для которых установлены операции сложения и умножения на число (вещественное или комплексное) так, что выполняются следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$ (коммутативность),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность),
3. в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$,
4. для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$.

Легко проверить, что элементы 0 и $-x$ определяются единственным образом.

Следующая группа аксиом связывает операции сложения и умножения на число: для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$, причем

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
6. $1 \cdot x = x$,
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

Определение. Совокупность L элементов линейного пространства E называется ***подпространством*** в E, если операции сложения элементов L и умножения их на числа приводят всегда к элементам из L.

Наименьшее подпространство состоит из одного элемента 0, наибольшее совпадает со всем E.

Определение. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ называются ***линейно независимыми***, если справедливо утверждение:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Бесконечная система векторов линейно независима, если каждая конечная подсистема линейно независима.

Определение. Максимальная линейно независимая система – ***базис*** (Гамеля) линейного пространства.