

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Учебное пособие для вузов

Ю.С. Радченко,
Т.А. Радченко

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2010

Содержание

Введение.....	3
1. Формирование базовой последовательности псевдослучайных чисел.....	3
2. Разыгрывание случайных событий.....	5
3. Моделирование дискретных случайных величин.....	6
4. Моделирование непрерывных случайных величин.....	10
4.1. Метод обратных функций.....	10
4.2. Метод Неймана (исключения).....	11
4.3. Метод суперпозиций.....	13
4.4. Моделирование гауссовых случайных величин.....	15
5. Первичная обработка данных.....	18
6. Лабораторные работы.....	24
7. Задания к лабораторным работам.....	26
Литература.....	29

Введение

Во многих прикладных областях при проектировании сложных систем управления и связи возникает необходимость в моделировании случайных процессов. Первая часть учебного пособия содержит изложение основных методов статистического моделирования случайных величин. В нем обобщен практический опыт статистического моделирования самих авторов и результаты современных исследований в этой области. Пособие содержит конкретные алгоритмы, примеры, рекомендации и индивидуальные задания.

1. Формирование базовой последовательности псевдослучайных чисел

В системе математического обеспечения практически любой современной ЭВМ имеется датчик, вырабатывающий значения случайной величины α , равномерно распределенной в интервале $[0,1]$. Большинство современных датчиков равномерно распределенных чисел $\alpha \in [0,1]$ построены по рекуррентному алгоритму

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n).$$

Поскольку значения α должны заполнять всюду плотно отрезок $[0,1]$, то если взять на плоскости точки с координатами $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4), \dots$, они должны равномерно заполнить квадрат с единичной стороной. Этим свойством обладает, например, функция

$$\alpha_{n+1} = \{A \cdot \alpha_n\}, \quad (1.1)$$

$$P(\alpha \in (z_{j-1}, z_j]) = F_\alpha(z_j) - F_\alpha(z_{j-1}) = z_j - z_{j-1} = p_j = P(A_j).$$

Отсюда следует алгоритм разыгрывания полной группы несовместных событий:

1) Вырабатывается значение случайной величины α ;

2) Значение α сравнивается с величиной $z_1 = p_1$;

Если $\alpha < z_1$, то имеет место событие A_1 . Если $\alpha \geq z_1$, то формируется

$$z_2 = z_1 + p_2$$

3) Значение α сравнивается с z_2 :

Если $\alpha < z_2$, то имеет место событие A_2 .

Если $\alpha \geq z_2$, то формируется $z_3 = z_2 + p_3$

и т.д. до тех пор, пока не достигнем z_{k-1} .

4) Если $\alpha < z_{k-1}$, то имеет место событие A_{k-1} , иначе событие A_k .

В результате моделирования, т.к. $\alpha \in [0,1]$, его значение обязательно попадет в какой-то подинтервал, следовательно, обязательно реализуется одно из возможных событий A_j .

3. Моделирование дискретных случайных величин.

Пусть ξ дискретная случайная величина, ряд распределения которой:

x_j	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p_j	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Если в качестве случайного события A_j рассматривать $A_j = \{\xi = x_j\}$, то A_j , $j = \overline{1, k}$ составят полную группу несовместных событий, и моделирование случайной величины ξ будет сводиться к предыдущей задаче разыгрывания полной группы событий. В результате моделирования реализуется значение случайной величины ξ .

Формирование наиболее распространенных дискретных распределений

1) Дискретное равномерное распределение.

Данному распределению подчиняется случайная величина ξ , представляющая из себя число, выбранное наудачу из M целых чисел, принадлежащих интервалу $[a, a+M-1]$.

Ряд распределения: $p_j = 1/M, j = a, a+1, \dots, a+M-1$.

Где a – параметр положения (левая граница области возможных значений случайной величины), M – параметр масштаба (число различных возможных значений случайной величины), a и M – целые числа, $M \geq 2$.

Генерирование случайных чисел, подчиняющихся данному распределению

Алгоритм: $x_i = [M\alpha_i] + a$.

Здесь $[z]$ – целая часть числа z , α_i – значение случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[0,1]$, получаемое при i -том обращении к датчику равномерных чисел.

2) Распределение Бернулли

Данному распределению подчиняется реализация случайного события в однократном испытании.

Ряд распределения: $P_j = p^j(1-p)^{1-j}$, $j=0, 1$,

где параметр p – вероятность успеха в опыте ($0 < p < 1$). Алгоритм формирования случайной величины с распределением Бернулли

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \leq p \\ 0, & \text{если } \alpha > p \end{cases}.$$

3) Биномиальное распределение

Данному распределению подчиняется случайная величина ξ , представляющая из себя число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q=1-p$ в каждом испытании.

Ряд распределения: $P_j = C_n^j p^j(1-p)^{n-j}$, $j=0, 1, \dots, n$.

Где параметр p – параметр формы ($0 < p < 1$).

Возможны два способа формирования случайных величин с биномиальным законом распределения.

Алгоритм 1 реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин.

Алгоритм 2 имитирует серию из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p .

$$\xi = \sum_{i=1}^n \beta_i, \text{ где } \beta_i = \begin{cases} 1, & \alpha_i \leq p \\ 0, & \alpha_i > p \end{cases}.$$

Здесь $\alpha_i \in [0,1]$ равномерно распределенные случайные числа, формируемые в цикле по $i = 1..n$.

Данная схема моделирования становится неудобной при моделировании очень большой или бесконечной группы счетных событий. В таком случае моделирование удобно производить на основе рекуррентного вычисления вероятностей P_j

$$P_j = P_{j-1} \cdot f(j, \lambda).$$

Здесь λ - параметры распределения дискретной случайной величины.

Пример 3.1: Сформировать случайную величину с пуассоновским распределением

$$P_j = \frac{\lambda^j \exp(-\lambda)}{j!}.$$

Тогда

$$f(j, \lambda) = \frac{P_j}{P_{j-1}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Следовательно, вероятности можно не задавать в виде таблицы, а вычислять в цикле

$$P_j = P_{j-1} \cdot \lambda / j, \quad P_0 = \exp(-\lambda).$$

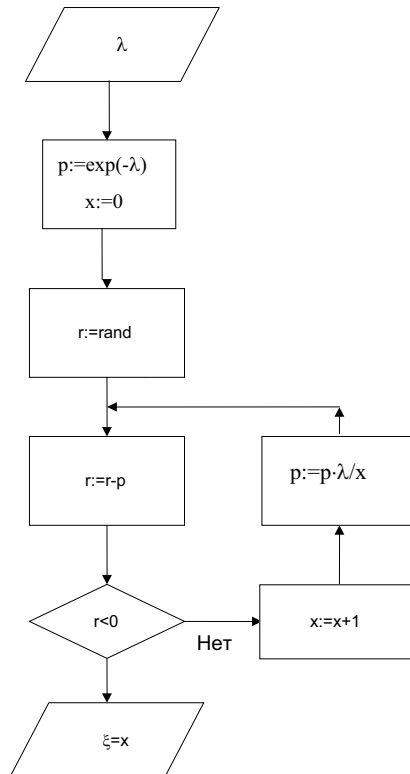


Рис. 3.1 . Блок-схема формирования пуассоновской случайной величины с рекуррентным вычислением вероятностей.