

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации  
Департамент кадровой политики и образования  
Челябинский государственный агроинженерный университет

В.А. Жилкин

# **ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТНСАД ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ**

Часть 2. Теоретическая механика  
**К и н е м а т и к а**

*Рекомендовано УМО вузов Российской Федерации  
по автотракторному и дорожному образованию  
в качестве учебного пособия для студентов специальности  
«Сельскохозяйственные машины и оборудование»*

**Челябинск**  
2001

УДК 531.32: 631.3

Жилкин В.А. Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. Часть 2. Теоретическая механика. Кинематика: Учебное пособие. Челябинский государственный агроинженерный университет. – Челябинск, 2001.- 200 с.

В учебном пособии излагаются основные положения раздела «Кинематика» курса теоретической механики, предусмотренные учебным планом специальности 171000 «Сельскохозяйственные машины и оборудование». При решении задач, там где это целесообразно, используется программный продукт MathCAD 2000. Большинство задач взято из сборника И.В. Мещерского.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса специальности 171000 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», изучающих курс «Теоретическая механика» и является продолжением уже изданных пособий:

- 1) Жилкин В.А. Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. Часть 1. MathCAD. Челябинск, 2000. – 71 с.;
- 2) Жилкин В.А. Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. Часть 2. Теоретическая механика. Статика. Челябинск, 2000. – 100 с.;

#### Рецензенты

Сапожников С.Б. – докт. техн. наук, проф. (ЮРГУ)

Рахимов Р.С. – докт. техн. наук, проф. (ЧГАУ)

ISBN 5-88156-213-5

© Челябинский государственный агроинженерный университет,  
2001.

## 2.2. КИНЕМАТИКА

В этом разделе механики изучается движение точки или тела независимо от причин, вызывающих или изменяющих его, т.е. независимо от сил. По предложению французского ученого *Ампера* (1775-1836) этот раздел механики называется кинематикой.

Движение точки или тела происходит в пространстве с изменением времени. При этом пространство предполагается трехмерным евклидовым. Его свойства во всех точках и направлениях одинаковы и не зависят от тел, находящихся в нем, и от их движений. Такое пространство называют *абсолютным*.

Под движением точки понимают изменение положения точки или тела в пространстве по отношению к какому-либо другому телу.

Это значит, что при изучении движения тела всегда должно быть известно относительно какого другого тела рассматривается это движение. С телом, по отношению к которому изучается движение, телом отсчета, связывают систему координатных осей и часы. Эту совокупность тела отсчета и связанную с ним систему координатных осей (систему координат) и часов называют *системой отсчета*. В кинематике безразлично, какое движение совершает выбранная система координат по отношению к каким-то иным телам, не входящим в рамки рассматриваемого явления. Однако всегда следует иметь в виду, что характер наблюдаемого движения существенно зависит от выбора тела (системы координат), относительно которого изучается движение. Так, поршень автомобильного двигателя совершает относительно корпуса автомобиля прямолинейное колебательное движение, а относительно дороги, по которой движется автомобиль с постоянной скоростью, перемещается по синусоиде.

Время принято считать одинаковым во всех системах отсчета, независимо от их движения. Это время называют *абсолютным*. Начало отсчета времени, т. е. тот момент времени, с которого начинается его счет, можно выбирать применительно к условиям задачи. Единицы для измерения расстояния и времени также можно выбирать применительно к условиям задачи. Основной единицей времени является секунда (*с*), расстояния - метр (*м*).

Так как в теоретической механике считается, что время, являющееся непрерывно изменяющейся величиной, не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и всех системах отсчета, то, говоря о системе отсчета, можно ограничиться указанием только тела отсчета или системы координатных осей (системы координат), связанных с этим телом. В кинематике движение тел изучается с чисто геометриче-

ской точки зрения и связь между движением и движущими силами не рассматривается.

Связь между положением движущейся точки в пространстве и временем определяет *закон её движения*.

Задать движение точки или тела относительно какой-либо системы отсчета значит сформулировать условия, позволяющие найти их положение в любой момент времени относительно этой системы отсчета.

Основной задачей кинематики является изучение законов движения материальных точек и их систем<sup>1</sup>.

## 2.2.1. Кинематика точки

### 2.2.1.1. Способы задания движения точки

Движение точки в пространстве определяется тремя основными способами: **векторным, координатным и естественным**.

#### 2.2.1.1.1. Векторный способ

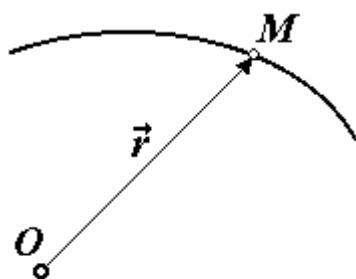


Рис.2.69

Выберем в пространстве неподвижную точку  $O$  и проведем из этой точки в точку  $M$ , движение которой изучается, радиус-вектор  $\vec{r}$  (рис. 2.69; нумерация рисунков и формул является продолжением нумераций этих параметров учебного пособия: Жилкин В.А. «Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. Часть 2. Теоретическая механика. Статика. Челябинск, 2001»). Каждому моменту времени  $t$  соответст-

<sup>1</sup> Развитие кинематики связано с работами механиков:

- **Галилея Галилео** (1564-1642), который впервые ввел понятие «ускорение»;
- **Гюйгенса Христиана** (1629-1695), обобщившего понятие «ускорение» для случая криволинейного движения, он первый применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие;
- **Леонарда Эйлера** (1707-1783), заложившего основы кинематики твердого тела и создавшим аналитические методы решения задач механики;
- **Понселе Жан Виктор** (1788-1867), применившего методы кинематики для исследования движения механизмов и машин;
- **Кориолиса Гюстав Гаспара** (1792-1843), установившего основной закон сложения ускорений в случае каких угодно составных движений;
- **Чебышева Пафнутия Львовича** (1821-1894), основоположника русской школы теории механизмов и машин.

ует определенное значение  $\vec{r}$ . Следовательно, радиус-вектор  $\vec{r}$  однозначно определяет положение точки  $M$ . Функция времени

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)} \quad (2.63)$$

определяет закон движения точки  $M$ .

Кривая, описываемая точкой  $M$  в пространстве, называется **траекторией** движения точки.

Уравнение (2.63), конечно, является также векторным уравнением траектории.

**Годографом** какого-либо вектора называют кривую, которую вычерчивает конец этого вектора при изменении его аргумента (предполагается, что начало вектора находится все время в одной и той же точке).

Годографом радиус-вектора, определяющего положение точки, будет траектория точки.

Задать вектор как функцию времени значит уметь находить его модуль и направление в любой момент времени, следовательно, задание радиус-вектора как функции времени обязательно предполагает наличие системы координат. При решении конкретных задач обычно переходят от векторного способа к координатному и естественному способам задания движения.

### 2.2.1.1.2. Координатный способ

Способ задания движения, заключающийся в задании координат точки как известных функций времени, называется *координатным способом* задания движения и требует выбора конкретной системы координат. Этот выбор определяется содержанием решаемой задачи.

#### Ортогональная декартова система координат

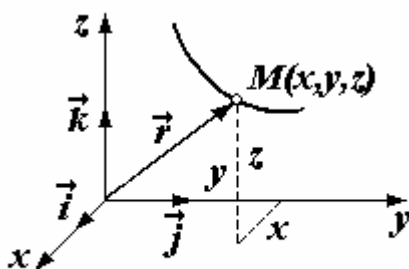


Рис.2.70

При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат указанный способ заключается в задании координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  подвижной точки  $M$  как известных функций времени (рис. 2.70):

$$\boxed{x = x(t), y = y(t), z = z(t)} . \quad (2.64)$$

Три функциональные зависимости (2.64) называются **кинематическими уравнениями движения точки**.

Если точка движется в плоскости  $Oxy$ , ее движение определяется двумя уравнениями:

$$\boxed{x = x(t), y = y(t)} . \quad (2.65)$$

Если точка движется по прямой, ее положение можно определить одной координатой:

$$\boxed{x = x(t)} . \quad (2.66)$$

Уравнения движения (2.64) точки  $M$  представляют собой одновременно и уравнения траектории в параметрическом виде, где роль параметра играет время  $t$ . Чтобы найти уравнения траектории в координатной форме, надо из уравнений (2.64) исключить параметр  $t$ .

**Задача 10.12.** Кривошип  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Длина  $OA = AB = 80 \text{ см}$ . Найти уравнения движения и траекторию средней точки  $M$  шатуна, а также уравнение движения ползуна  $B$ , если в начальный момент ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на рис.2.71,а.

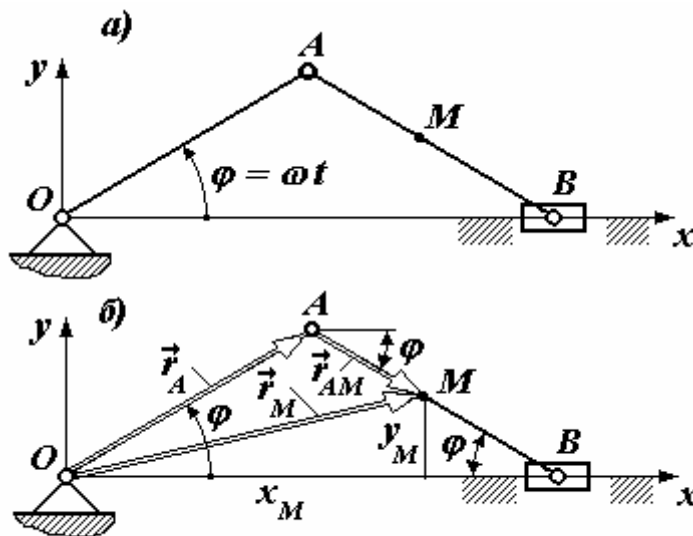


Рис.2.71

Ответ:

- 1)  $x_M = 120 \cos(10t)$ ,  
 $y_M = 40 \sin(10t)$ ;
- 2) траекторией точки  $M$  является эллипс

$$\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1;$$

- 3) уравнение движения ползуна  $B$ :  $x_B = 160 \cos(10t)$ .

**Решение.** По условию задачи требуется определить радиус-вектор точки  $M$ :  $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t)$ . Функцию  $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t)$  определим через известные векторы  $\vec{r}_A$  и  $\vec{r}_{AM}$ :

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AM}(t)$$

или

$$x_M \vec{i} + y_M \vec{j} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + x_{AM} \vec{i} + y_{AM} \vec{j}. \quad (2.67)$$