

УДК 550.8:553.98

ББК 26.324.341

Д 83

### **Данилов В. Л.**

Стационарные обратные краевые задачи геофизики и механики и их решение методами установления. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. — 296 с.

В книге изложены теория и практика приложения разработанных автором методов решения стационарных обратных задач (СОЗ) теории потенциала. Она является концентрированным изложением четырех опубликованных с 1996 монографий автора: «Методы установления в прикладных обратных задачах гравитационной разведки и теории фигуры Земли» (М.: «Наука», 1996), «Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения» (М.–Ижевск: ИКИ, РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2003), «Методы установления в стационарных обратных задачах электроразведки и магниторазведки» (Ижевск: ИКИ, 2006), «Методы установления в стационарных обратных задачах гидро-, аэро-, газодинамики и теории фильтрации в пористой среде» (ИКИ, РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2013). Методы установления основаны на погружении СОЗ в пространство большей размерности, что позволяет редуцировать СОЗ к проблемам Коши. Решением исходной СОЗ является стационарная асимптотика решения проблемы Коши при времени  $t$ , стремящемся к бесконечности.

Предложенный подход позволяет эффективно решать СОЗ в нелинейной постановке как на плоскости, так и в пространстве, одновременно регуляризируя некорректные задачи.

Для геофизиков, специалистов по математической физике, вычислительной математике и компьютерному моделированию, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

**ISBN 978-5-4344-0157-9**

© В. Л. Данилов, 2013

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2013

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	19
-----------------------	----

<b>ЧАСТЬ I. ПОСТАНОВКА И КЛАССИФИКАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ (СОЗ)</b> .....	25
--	----

<b>ГЛАВА 1. Постановка и классификация СОЗ в различных геофизических методах разведки полезных ископаемых</b> .....	27
§ 1.1. СОЗ в гравитационной разведке.....	27
1.1.1. Обратная задача определения положения и формы аномалиеобразующего тела (АОТ) при известной его плотности .....	27
1.1.2. Обратная задача определения плотности тела (АОТ) при известной его границе .....	31
1.1.3. Обратная задача совместного определения границы АОТ и его плотности (обобщенная задача гравиразведки).....	32
1.1.4. Обратные задачи гравиразведки при частичном или дискретном задании условия на поверхности измерений и о его плотности.....	33
1.1.5. Возможные обобщения на многосвязные области .....	35
1.1.6. Классификация СОЗ с данными на известной границе (тип А) .....	35
§ 1.2. СОЗ электрической разведки.....	37
1.2.1. Некоторые сведения об электроразведке.....	37
1.2.2. Формулировка прямой и обратной задач электроразведки с постоянным током.....	39
1.2.3. Обратные задачи определения характеристик АОТ .....	39
1.2.4. Об электрическом поле в теле Земли .....	40

§ 1.3. СОЗ магнитной разведки.....	43
1.3.1. Некоторые исторические сведения и современные представления о магнитном поле Земли и его особенностях .....	43
1.3.2. Прямые и обратные задачи магниторазведки.....	48
1.3.3. Формулировка СОЗ МР для АОТ и обоснование гравитационно-магнитной аномалии (ГМА).....	53
 <b>ГЛАВА 2. Постановка и классификация СОЗ теории фигуры Земли и жидких планет .....</b>	<b>57</b>
§ 2.1. СОЗ в инерциальной системе отсчета. Различные виды задач .....	57
2.1.1. СОЗ определения границы тела по заданному на ней распределению потенциала и при известном распределении плотности .....	57
2.1.2. СОЗ определения границы тела по заданной на ней нормальной производной потенциала и известном распределении его плотности.....	58
§ 2.2. СОЗ в неинерциальной (равномерно вращающейся) системе отсчета .....	59
2.2.1. Обратные задачи определения фигур равновесия вращающейся жидкости.....	59
2.2.2. Обратная задача Стокса об определении фигуры геоида.....	64
2.2.3. Обратная задача Молоденского определения фигуры реальной Земли.....	65
§ 2.3. Классификация СОЗ с данными на искомой границе (тип В).....	68
 <b>ГЛАВА 3. Постановка и классификация СОЗ гидро-, аэро-, газодинамики и гидродинамической теории фильтрации .....</b>	<b>71</b>
§ 3.1. Краткие сведения о СОЗ в гидро-, аэро-, газодинамике и гидродинамической теории фильтрации .....	71
§ 3.2. Проблема физической реализуемости решения.....	72
§ 3.3. Формулировка обратной краевой задачи обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости (ОКЗА ИНЖ) .....	73

§ 3.4. Постановка СОЗ гидродинамической теории фильтрации .....	76
--	----

## **ЧАСТЬ II. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СОЗ ..... 87**

### **ГЛАВА 4. Некорректность большинства СОЗ. Особенности     различных обратных задач ..... 89**

§ 4.1. Некорректность — важное качественное отличие большинства рассматриваемых СОЗ .....	89
§ 4.2. Особенности различных рассматриваемых СОЗ .....	93

### **ГЛАВА 5. Вариационный принцип (ВП) минимума мощности     диссипации энергии при фильтрации жидкостей в пористой     среде ..... 97**

§ 5.1. Доказательство вариационного принципа (ВП) .....	97
§ 5.2. Интерпретация вариационного принципа и его обобщения .....	99

### **ГЛАВА 6. Вопросы сходимости методов установления.     Методы установления как методы регуляризации некорректных     задач и как методы коррекции постановки некорректных     задач..... 101**

§ 6.1. Предварительные сведения о методах установления.....	101
§ 6.2. Математические модели некоторых фильтрационных течений ...	103
§ 6.3. Редукция СОЗ типа А к прямым нестационарным задачам (ПНЗ) исходя из гравитационно-фильтрационной аналогии (ГФА) .....	108
§ 6.4. Формулировка обратных задач как задач минимизации квадратичного функционала невязки .....	112
§ 6.5. О методах установления как методах регуляризации и методах коррекции постановки некорректных задач .....	116
§ 6.6. О выборе критериев оптимального момента остановки процесса счета .....	119

### **ГЛАВА 7. О свойстве жесткости уравнений методов     установления ..... 121**

### **ЧАСТЬ III. РЕДУКЦИЯ СОЗ К ПРЯМЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЗАДАЧАМ (ПНЗ), Т. Е. К ПРОБЛЕМАМ КОШИ ..... 123**

#### **ГЛАВА 8. Сведение СОЗ гравитационной, электрической и магнитной разведок к ПНЗ..... 125**

- § 8.1. Установление гравитационно-фильтрационной аналогии (ГФА)  
и сведение СОЗ гравиразведки к ПНЗ (к проблемам Коши) ..... 125
- § 8.2. Установление электрофильтрационной аналогии (ЭФА) и вывод  
уравнений методов установления для сведения СОЗ электро-  
разведки к ПНЗ..... 128
- § 8.3. Установление гравитационно-магнитной и магнитно-  
фильтрационной аналогий (ГМА и МФА) и сведение СОЗ  
магнитной разведки к ПНЗ ..... 132

#### **ГЛАВА 9. Сведение к ПНЗ классических СОЗ теории фигуры Земли и жидких планет в неинерциальных системах координат ..... 139**

- § 9.1. Модель фильтрации в неинерциальной системе отсчета..... 139
- § 9.2. Сфероид Ньютона ..... 143
- § 9.3. Модель трехслойной жидкой Земли ..... 150
- § 9.4. СОЗ определения фигур равновесия вращающейся жидкости  
в другой жидкости. Опыты Плато ..... 155
- § 9.5. Обратная задача Стокса определения фигуры геоида ..... 158
- § 9.6. Сведение ОКЗ М. С. Молоденского определения фигуры  
реальной Земли к ПНЗ-100 ..... 160
- § 9.7. Промежуточные итоги..... 161
- § 9.8. Альтернативная формулировка ПНЗ ..... 162

#### **ГЛАВА 10. Сведение к ПНЗ обратных краевых задач гидро- и аэродинамики обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости (ОКЗА ИНЖ) и их обобщения ..... 171**

- § 10.1. Некоторые предварительные сведения об истории и постановке  
СОЗ в гидро- и аэродинамике и их особенностях ..... 171
- § 10.2. Метод сведения ОКЗА ИНЖ к проблеме Коши с опорой  
на ГФА ..... 172

<b>ЧАСТЬ IV. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПНЗ, К КОТОРЫМ СВЕДЕНЫ СОЗ ГЕОФИЗИКИ И МЕХАНИКИ</b> .....	179
<b>ГЛАВА 11. Метод линеаризации и тестовые задачи</b> .....	181
§ 11.1. Условия применяемости метода линеаризации .....	181
§ 11.2. Решение СОЗ гравиразведки об определении фигуры АОТ, близкой к сфере .....	185
§ 11.3. Сфероид Ньютона как фигура равновесия однородной вращаю- щейся жидкости .....	188
§ 11.4. Решение линеаризованной задачи о сфероиде Ньютона .....	195
§ 11.5. О нелинейных задачах рассмотренного вида .....	200
§ 11.6. СОЗ определения фигуры геоида (обратная проблема Стокса) .....	201
§ 11.7. Линейная СОЗ определения плотности АОТ при его известной форме .....	211
<b>ГЛАВА 12. Метод «быстрого времени»</b> .....	221
§ 12.1. Основной смысл введения «быстрого времени» .....	221
§ 12.2. Пример преобразования уравнений метода установления .....	221
<b>ГЛАВА 13. Графоаналитический метод</b> .....	229
<b>ГЛАВА 14. Метод характеристик. Метод конечных разностей</b> .....	231
§ 14.1. К обоснованию метода характеристик .....	231
§ 14.2. Метод конечных разностей .....	232
§ 14.3. Решение нелинейных плоских СОЗ гравиразведки методом конечных разностей .....	234
<b>ГЛАВА 15. Линеаризационно-вариационный метод</b> .....	259
<b>ГЛАВА 16. Возможности обобщения методов установления на иные обратные задачи</b> .....	261
<b>Заключение</b> .....	263

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Краткие сведения о ньютоновом и логарифмическом потенциалах простого и двойного слоев .....	265
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Приближенные методы вычисления сингулярного интеграла с ядром Гильберта.....	271
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Таблицы: Из международной системы единиц (СИ). Производные единицы. Единицы электрических и магнитных величин. Связь между единицами измерения магнитных величин в системах СГС и СИ.....	273
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Из Международной системы единиц (СИ) .....	276
Список литературы .....	281