

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

**ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ  
ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

*Учебно-методическое пособие*

Составители:  
Е.В. Невежин, Г.В. Быкадорова,  
А.Н. Цоцорин

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ .....	5
2. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ .....	9
3. ВЕКТОРНОЕ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	17
4. ДВУХПОЛЮСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.....	24
5. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ <b>RLC</b> -ЦЕПЕЙ .....	28
6. СИМВОЛИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.....	39
6.1. Операции над комплексными изображениями .....	40
6.2. Комплексные сопротивления и проводимости.....	41
6.3. Методы символического анализа.....	42
6.3.1. Цепи с параллельным и последовательным соединениями элементов.....	44
6.3.2. Цепи со смешанным соединением элементов .....	47
6.3.3. Цепи произвольной конфигурации. Метод узловых напряжений.....	49
6.3.4. Частотные характеристики электрических цепей .....	54
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	61

пассивные двухполюсники вводятся в схему вместе с полярностью напряжения на их выводах и связанным с ней направлением тока.

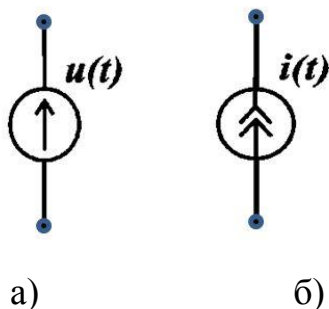


Рис. 1. Идеальные источники:

*а* – идеальный источник напряжения; *б* - идеальный источник тока

Резистор  $R$  (рис. 2) – элемент, потребляющий электрическую энергию.

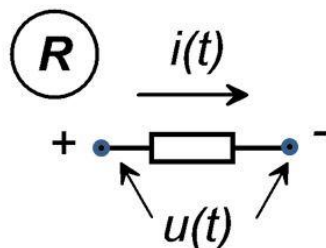


Рис. 2. Резистор

Как элемент электрической цепи он описывается законом Ома:

$$u(t) = Ri(t), \quad (1.1)$$

и характеризуется величиной сопротивления  $R$ , измеряемой в омах (Ом).

Обратная сопротивлению величина

$$G = \frac{1}{R},$$

называемая проводимостью, измеряется в сименсах (См).

Энергия, потребляемая (рассеиваемая) резистором за время  $\tau$ , определяется так:

$$W_R = \int_0^{\tau} P(t) dt, \quad (1.2)$$

где  $P(t)$  – мгновенная мощность, выделяемая элементом в момент времени  $t$ .

Определение 1.3. Мгновенная мощность  $P(t) = u(t)i(t)$  – произведение мгновенных значений напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$ .

Конденсатор  $C$  (рис. 3) – двухполюсник, способный накапливать электрическую энергию, которая заключается в его электрическом поле. Из определения электрической емкости как физической величины следует, что заряд  $q(t)$ , накопленный конденсатором, пропорционален напряжению на его выводах [1]:

$$q(t) = Cu(t).$$

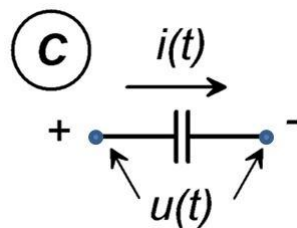


Рис. 3. Конденсатор

Дифференцируя это равенство по времени, получим соотношение между током и напряжением:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.3)$$

– ток, протекающий через выводы конденсатора, пропорционален скорости изменения напряжения на этих выводах.

Энергию, запасенную конденсатором, заряженным до напряжения  $U$  за время  $0 \dots \tau$  можно найти через мгновенную мощность:

$$W_C = \int_0^\tau u(t) i(t) dt = \int_0^\tau u(t) C \frac{du(t)}{dt} dt = C \int_0^U u du = \frac{CU^2}{2}. \quad (1.4)$$

Емкость измеряется в фарадах (Ф). Из (1.3) следует, что эту единицу можно выразить так:  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ с/Ом}$ .

Индуктивность  $L$  (рис. 4) способна накапливать энергию, сосредоточенную в ее магнитном поле.

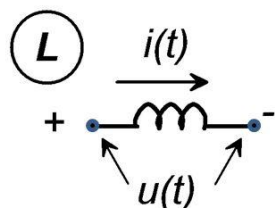


Рис. 4. Индуктивность

Как элемент электрической цепи индуктивность связывает ток  $i(t)$ , протекающий через нее, с ее потокосцеплением  $\Psi(t)$ :

$$\Psi(t) = Li(t).$$

Поскольку э.д.с. самоиндукции  $e_{инд}$ , формируемая индуктивностью, пропорциональна скорости изменения потокосцепления [1], падение напряжения на ней будет пропорционально скорости изменения тока:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.5a)$$

откуда

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt. \quad (1.5b)$$

Для вычисления энергии индуктивности с током величиной  $I$  можно воспользоваться подходом, показанным в (1.4):

$$W_L = \int_0^{\tau} u(t)i(t)dt = \int_0^{\tau} i(t)L \frac{di(t)}{dt} dt = C \int_0^I idi = \frac{LI^2}{2}. \quad (1.6)$$

Индуктивность измеряется в генри (Гн). Из (1.5) следует, что  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$ .

## 2. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ

Синусоидальные (гармонические) напряжения и токи занимают особое место среди прочих видов воздействия на электрические цепи по ряду причин:

- производство и транспортировка электрической энергии в промышленных масштабах осуществляется переменными токами синусоидальной формы, что связано, в первую очередь, с принципами ее генерации;
- в практике исследования и проектирования электро- и радиотехнических устройств широко используется возможность представления как периодических, так и непериодических напряжений и токов произвольной формы суммой ряда синусоид с определенным образом вычисленными коэффициентами;
- с синусоидальным напряжением связано понятие «несущего» сигнала, широко используемого для передачи информации, радио- и телевидения;
- напряжение с формой синуса широко используется для изучения свойств электрических цепей и электронных устройств.

На рис. 2.1 приведено синусоидальное напряжение как функция времени. Его характерные параметры:

- амплитуда  $U_m$  – максимальное значение напряжения, измеряется в вольтах (В);
- период – интервал времени  $T_1 = T_2 = T_3 = T$ , через который значения напряжения повторяются. Это означает, что функция

$$u(t) = u(t + T) \quad (2.1)$$

является периодической. Период измеряется в секундах (с).

Для формального описания этой зависимости нужно иметь в виду, что аргументом синусоидальной функции должна быть безразмерная величина, задающая величину угла:

$$u(t) = U_m \sin[\varphi(t)],$$

где  $\varphi(t)$  – мгновенное значение угла.

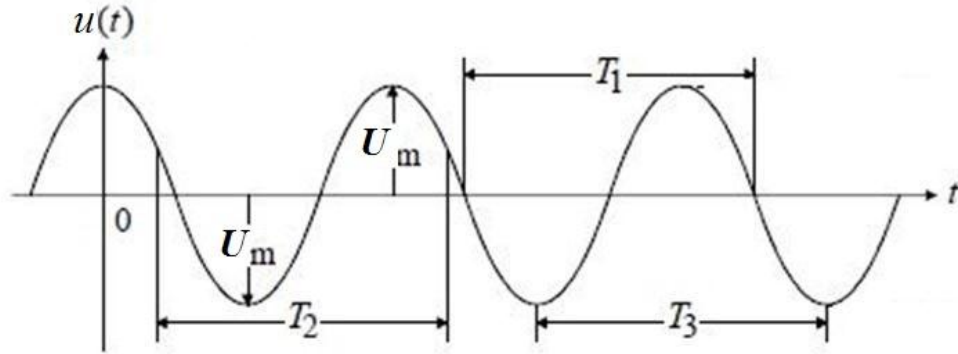


Рис. 5. Синусоидальное напряжение как функция времени

Для того чтобы выполнялось (2.1),  $\varphi(t)$  может быть линейной функцией времени, например,

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad (2.2)$$

где  $\varphi_0$  – значение, которое принимает  $\varphi(t)$  при  $t = 0$ . Таким образом,

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.3)$$

На рис. 6 приведены два синусоидальных напряжения с различными значениями  $\varphi_0$ . Аналогично выглядит зависимость синусоидального тока.

Для представления синусоиды в форме (2.3) доопределим ее наиболее важные параметры.

Определение 2.1.  $\varphi_0$  – начальная фаза напряжения (тока) – значение  $\varphi(t)$  при  $t = 0$ , измеряется в радианах (рад), реже в градусах (град).

Определение 2.2.  $\omega$  – угловая частота, ее можно понимать как скорость изменения фазы (см. 2.2):