

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова»

Е.Ю. Кунакова, И.Л. Томашевский

ЛЕКЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Архангельск



ИПЦ САФУ

2013

УДК 517.98(075)

ББК 22.162я73

К 91

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Северного (Арктического) федерального университета
имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры
математического анализа МГУ им. М.В. Ломоносова
К.А. Мирзоев;
кандидат физико-математических наук, доцент, старший
научный сотрудник физического факультета СПбГУ
А.А. Покровский

Кунакова, Е.Ю.

К 91 Лекции по функциональному анализу: учебное пособие /
Е.Ю. Кунакова, И.Л. Томашевский; Сев. (Арктич.) федер. ун-т
им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: ИПЦ САФУ, 2013. – 118 с.:
ил.

ISBN 978-5-261-00759-3

В основе учебного пособия лежит курс лекций, читаемый студентам Северного (Арктического) федерального университета по специальности 230404.45 «Прикладная математика». Теоретический материал дополнен задачами, способствующими лучшему усвоению теоретических понятий.

Пособие рассчитано на студентов, изучающих предмет в объеме 68 аудиторных часов. Предполагается знакомство читателя с основными понятиями линейной алгебры.

Компьютерная верстка выполнена Е.Ю. Кунаковой.

УДК 517.98(075)

ББК 22.162я73

ISBN 978-5-261-00759-3

© Кунакова Е.Ю., Томашевский И.Л., 2013

© Северный (Арктический) федеральный
университет им. М.В. Ломоносова, 2013

Оглавление

Введение	4
1. Линейные нормированные пространства	6
2. Задачи на исследование различных линейных нормиро- ванных пространств	12
3. Непрерывные функции в нормированных пространствах, принцип сжимающих отображений	26
4. Линейные операторы в нормированных пространствах .	32
5. Задачи на исследование линейных операторов (линейность, непрерывность, норма)	38
6. Операции над операторами, линейное нормированное про- странство операторов	41
7. Обратимые линейные операторы, обратный оператор . .	45
8. Спектр оператора	49
9. Задачи на исследование спектров операторов	52
10. Оператор резольвенты	55
11. Расширение и сужение операторов	59
12. Компактные операторы	61
13. Гильбертовы пространства	66
14. Примеры ортонормированных базисов в гильбертовых про- странствах	88
15. Линейные ограниченные операторы в гильбертовых про- странствах	92
16. О самосопряженных компактных операторах	101
17. Дифференцируемые функции, решение дифференциаль- ных уравнений с самосопряженными компактными опе- раторами	106
18. Унитарные операторы	111
19. Некоторые сведения о линейных неограниченных опера- торах	114
Список литературы	118

Введение

Функциональный анализ возник как новая дисциплина в начале прошлого столетия. Его формирование происходило в процессе обобщения ряда важных понятий и методов математического анализа, алгебры и геометрии. Среди таких понятий оказались, в частности, понятия функциональной зависимости, предельного перехода, близости и расстояния. Параллельно с обобщением происходила и геометризация понятий. Одним из ее проявлений был новый «геометрический» взгляд на функции как элементы особого рода функциональных пространств, получаемых путем обобщения понятия конечномерного линейного пространства на бесконечномерный случай. Далеко идущей аналогией между понятиями анализа и геометрии явилась также теория рядов Фурье. Геометризация этой теории естественным образом привела к бесконечномерному обобщению понятия евклидова пространства. В итоге формирование нового геометрического подхода проявилось в появлении новых обобщающих геометрических объектов в виде метрических, линейных нормированных и гильбертовых пространств, которые охватывали собой как ранее рассматривавшиеся геометрические объекты, так и возникающие внутри функционального анализа новые объекты типа функциональных пространств.

Параллельно с развитием теории пространств происходило развитие теории действующих в них операторов. Большим стимулом для этого развития явилась тесная взаимосвязь линейных операторов в гильбертовых пространствах с квантовой физикой.

Во второй половине XX века функциональный анализ пополнился рядом новых специальных разделов. Сфера его применения расширилась. В настоящее время он используется в теоретической и математической физике, теории дифференциальных уравнений, теории управления и оптимизации, теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и других областях.

Систематическое изложение этой важной и интересной дисциплины представлено в книгах Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, В.И. Смирнова, Дж.Т. Шварца, Н.И. Ахиезера и И.М. Глазмана и др. Данное пособие преследует существенно более про-

стую цель — вооружить читателя некоторым набором исходных сведений и понятий, которые могли бы облегчить дальнейшее более полное самостоятельное знакомство с предметом. Ориентировано пособие на студентов, успешно освоивших программу курсов математического анализа и линейной алгебры и хорошо знакомых с теорией конечномерных линейных и евклидовых пространств, а также с теорией линейных операторов в этих пространствах.

Большую признательность и благодарность авторы выражают А.В.Баданину, К.А. Мирзоеву и А.А. Покровскому за просмотр рукописи и ценные критические замечания и исправления.