

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Н. Ю. Кудряшова, Н. В. Печникова

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

ПЕНЗА 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

Н. Ю. Кудряшова, Н. В. Печникова

Дополнительные главы алгебры

Учебное пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2012

УДК 519.61+512.5
К88

Р е ц е н з е н т ы:

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика»
Пензенского государственного университета
архитектуры и строительства

В. Г. Камбург;

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой «Физика»
Пензенского государственного университета

В. Д. Кревчик

Кудряшова, Н. Ю.

К88

Дополнительные главы алгебры : учеб. пособие / Н. Ю. Кудряшова, Н. В. Печникова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. – 132 с.

ISBN

Излагаются основные численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений и проблемы собственных значений. Рассматриваются основные алгебраические структуры, такие как группы, кольца и поля. На основе изученного материала предлагается лабораторный практикум.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 231300 «Прикладная математика» (профиль подготовки «Математическое моделирование в экономике и технике»).

УДК 519.61+512.5

ISBN

© Пензенский государственный
университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 4 |
| Основные понятия. Нормы векторов и матриц | 6 |
| Глава I. Численные методы линейной алгебры | 7 |
| 1. Погрешности вычислений. Обусловленность матриц. Точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений | 7 |
| 2. Метод Гаусса | 11 |
| 3. Компактные схемы для решения неоднородных линейных систем | 14 |
| 4. Метод Гаусса–Жордана. Вычисление определителей. Обращение матриц | 15 |
| 5. Метод квадратных корней. Метод ортогонализации | 20 |
| 6. Принципы построения итерационных процессов. Метод простой итерации | 22 |
| 7. Необходимые и достаточные условия сходимости метода простой итерации. Подготовка системы к виду, удобному для итераций | 26 |
| 8. Метод Зейделя | 29 |
| 9. Методы полной и неполной релаксации. Управление релаксацией | 33 |
| 10. Релаксация по длине вектора невязки. Групповая релаксация | 37 |
| 11. Градиент функционала. Градиентные методы. Метод наискорейшего спуска. Метод с наименьшими невязками | 41 |
| 12. Методы сопряженных направлений. S-шаговые градиентные методы | 46 |
| 13. Полная проблема собственных значений. Устойчивость проблемы собственных значений. Метод Крылова нахождения собственных значений и собственных векторов | 52 |
| 14. Метод Лемана и его модификация Фаддеевым | 65 |
| 15. Эскалаторный метод | 68 |
| 16. Определение наибольшего по модулю собственного значения и принадлежащего ему собственного вектора | 72 |
| 17. Метод скалярных произведений. Метод координатной релаксации | 80 |
| 18. Метод λ -разности. Уточнение отдельного собственного значения и принадлежащего ему собственного вектора | 84 |
| Глава II. Основные алгебраические структуры | 87 |
| 1. Группы | 87 |
| 2. Кольца | 96 |
| 3. Поля. Тела. Алгебры | 100 |
| Глава III. Лабораторный практикум | 103 |
| Требования к оформлению отчета о выполнении лабораторной работы | 103 |
| Лабораторная работа № 1. Точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений | 104 |
| Лабораторная работа № 2. Итерационные методы решения систем уравнений | 112 |
| Лабораторная работа № 3. Градиентные методы решения систем уравнений | 117 |
| Лабораторная работа № 4. Методы решения полной проблемы собственных значений | 120 |
| Список литературы | 129 |

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено главным образом для студентов, обучающихся по направлению 231300 «Прикладная математика» (профиль подготовки «Математическое моделирование в экономике и технике») при изучении курса «Дополнительные главы алгебры». В учебное пособие включены основные теоретические сведения по изучению численных методов линейной алгебры и основных алгебраических структур, а также предлагается лабораторный практикум по основным численным методам линейной алгебры.

Первая глава учебного пособия посвящена рассмотрению основных численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений и проблемы собственных значений.

К численным методам алгебры относятся численные методы решения систем линейных уравнений, обращения матриц, вычисления определителей, нахождения собственных векторов и собственных значений. При формальном подходе решение этих задач не встречает затруднений: решение системы можно найти, раскрыв определители в формуле Крамера; для нахождения собственных значений матрицы достаточно выписать характеристическое уравнение и найти его корни. Однако на практике, как правило, указанные рекомендации встречают ряд затруднений. Так, например, при непосредственном раскрытии определителей решение системы с n неизвестными требует порядка $n!/n$ арифметических операций. Другой причиной, по которой эти классические способы неприменимы даже при малых n , является сильное влияние округлений при вычислениях на окончательный результат. Точно так же обстоит дело при нахождении собственных значений матрицы с использованием явного выражения характеристического многочлена.

Методы решения алгебраических задач разделяются на точные и приближенные (или итерационные). Под точными методами понимаются методы, которые дают решение задачи с помощью конечного числа элементарных арифметических операций. При этом, если исходные данные заданы точно и вычисления выполняются точно, то решение также получается точное. Приближенные методы являются средством нахождения приближенного решения. В этом случае ре-

шение получается как предел последовательных приближений, вычисляемых некоторым единообразным процессом. При применении итерационных методов существенным является не только сходимость построенных последовательных приближений, но и быстрота сходимости. В этом отношении каждый итерационный метод не является универсальным: давая быструю сходимость для одних матриц, он может сходиться медленно или даже совсем не сходиться для других. Поэтому при применении итерационных методов важную роль играет предварительная подготовка системы, т.е. замена данной системы ей эквивалентной, устроенной так, чтобы для нее выбранный процесс сходил по возможности быстро.

Во второй главе пособия изучению подвергаются немногие, наиболее важные типы алгебраических систем, т.е. множеств, составленных из элементов какой-либо природы, для которых определены некоторые алгебраические операции. Таковы, в частности, поля, кольца и группы. Теория полей оказалась естественной областью для дальнейшего развития теории уравнений, а ее основные ветви — теория полей алгебраических чисел и теория полей алгебраических функций — связали ее соответственно с теорией чисел и теорией функций комплексного переменного. Более широким, чем понятие поля, является понятие кольца. Простейшими примерами колец служат совокупность всех целых чисел (включая и отрицательные), система многочленов от одного неизвестного и система действительных функций действительного переменного. Теория колец включает в себя такие старые ветви алгебры, как теория гиперкомплексных систем и теория идеалов, она связана с рядом математических наук, в частности с функциональным анализом, и уже нашла некоторые выходы в физику. Еще большую область применений имеет теория групп. Группы играли большую роль уже в теории Галуа, в вопросе о разрешимости уравнений в радикалах, сейчас же они являются важным орудием в теории полей, во многих разделах геометрии, в топологии, а также и в кристаллографии, в теоретической физике. Вообще по широте области приложений теория групп занимает среди всех ветвей алгебры следующее после линейной алгебры место.

В третьей главе предлагается лабораторный практикум. При выполнении лабораторных работ было бы интересно сравнить результаты, получаемые для решаемых задач при использовании стандартных математических пакетов, с результатами, полученными по изучаемым в данном курсе численными методами.