МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А. Н. Спорыхин

КОНЦЕПЦИИ, ПОДХОДЫ И ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2018

ŋqdqȺeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔȺ ɈqddɏqȺè

ВВЕДЕНИЕ

ŋqdqʎeʎ bɆ dəqɆbʎɜe d ɛɔɑɓɔʎ Ɉqdqʎqʎè

I. Рассмотрим движение сплошной среды относительно инерциальной системы координат с точки зрения Эйлера. Тогда система универсальных уравнений такова:

а) в перемещениях

1) $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_\alpha v^\alpha = 0$

2) $\begin{cases} \rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ik} \\ a^k = \dfrac{\partial v^k}{\partial t} + v^e \nabla_e v^k \end{cases}$

3) $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^k \nabla_j w_k\right)$

4) $\dfrac{\partial w_i}{\partial t} = v_i$.

Здесь 16 уравнений (массовые силы заданы), а неизвестных 25 $\left(\rho,\ v_i,\ a^k,\ p^{ki},\ \varepsilon_{ij},\ w_i\right)$ – система 1)-4) не полная. Если имеет место классический случай (п. 5) $\left(p_{ij} = p_{ji}\right)$, то неизвестных станет на 3 меньше.

б) в скоростях перемещений

1) $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_\alpha v^\alpha = 0$

2) $\begin{cases} \rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ik} \\ a^k = \dfrac{\partial v^k}{\partial t} + v^e \nabla_e v^k \end{cases}$

3) $e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)$.

Здесь 13 уравнений, а неизвестных 22. В классическом случае неизвестных на 3 меньше. Система уравнений 1)-3) не полная.

II. Рассмотрим движение сплошной среды относительно неинерциальной системы координат с точки зрения Лагранжа. Тогда система уравнений такова:

а) в перемещениях

Задаем $\overset{0}{g}\left(\overset{0}{g}_{ij}\right)$, либо $\hat{g}\left(\hat{g}_{ij}\right)$, ρ_0 – известно, так как это плотность среды в начальном, недеформированном, состоянии.

1) $\rho=\rho_0\sqrt{\hat{g}/\overset{0}{g}}$ – уравнение неразрывности

2) $\rho F^k+\nabla_i p^{ik}=0$

3) $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\nabla_i \overset{0}{w}_j+\nabla_j \overset{0}{w}_i+\nabla_i \overset{0}{w}{}^k \nabla_j \overset{0}{w}_k\right)$

4) $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij}-\overset{0}{g}_{ij}\right)$.

Здесь 16 уравнений, а неизвестных, входящих в них, 25 $\left(\rho,\ \hat{g}_{ij},\ p^{ki},\ \varepsilon_{ij},\ w_i\right)$. Очевидно, что в классическом случае разница между количеством неизвестных и количеством уравнений равна 6. Система 1)-4) не полная.

б) в скоростях перемещений

1. $\rho=\rho_0\sqrt{\hat{g}/\overset{0}{g}}$

2. $\rho F^k+\nabla_i p^{ik}=0$

3. $e_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i\right)$

4. $e_{ij}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d\hat{g}_{ij}}{dt}$.

Имеем 16 уравнений, а неизвестных, входящих в них, 25.

Вопросы:

1. Показать, что в последнем примере число неизвестных действительно равно 25, указать их.

2. Почему в системах уравнений как в случае а), так и в случае б) не привлечены уравнения совместности деформаций и, соответственно, уравнения совместности скоростей деформаций?

3. Какая из приведенных систем уравнений соответствует геометрически нелинейному варианту?

§2 ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД

Убедились, что универсальных уравнений недостаточно для описания движения конкретной сплошной среды, так как число уравнений меньше числа входящих в них неизвестных, система не полная.

Построение полных систем уравнений, описывающих движение конкретной сплошной среды, связано с построением моделей сплошных сред. Очевидно, построить полную систему уравнений – это значит построить математическую модель изучаемой среды. Построение моделей сплошных сред связано с экспериментом, либо они просто постулируются.

В этом параграфе рассмотрим простейшие модели сред, ограничившись случаем, когда свойства сред и изучаемые процессы таковы, что для описания их механического движения не надо привлекать термодинамические уравнения.

Одной из первых моделей является модель идеальной жидкости и газа, реологические уравнения которых имеют вид

$$p^{ij} = -pg^{ij}.$$

Установление этой зависимости связано с экспериментальных изучением свойств материала. Из этого соотношения следует, что в идеальной жидкости (газе) тензор напряжения задается одним числом – p – давлением. В рамках этой реологии получают уравнения движения идеальной жидкости – уравнения Эйлера. В общем случае криволинейной системы координат они таковы:

$$\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^l \nabla_l v^k = F^k - \frac{1}{\rho} g^{ki} \nabla_i p.$$

Эта система уравнений совместно с уравнением неразрывности $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_\alpha v^\alpha = 0$ есть система 4-х уравнений относительно 5 неизвестных $(\rho,\ p,\ v^i)$, массовые силы заданы, система неполная. Предположение о несжимаемости идеальной жидкости (газа) дает уравнение $\frac{d\rho}{dt} = 0$, которое в общем случае криволинейной системы координат записывается в форме $\frac{d\rho}{dt} + v^l \nabla_l \rho = 0$. Таким образом, полная система уравнений идеальной несжимаемой жидкости (газа) запишется так

а) $\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^l \nabla_l v^k = F^k - \frac{1}{\rho} g^{ki} \nabla_i p$

б) $\frac{d\rho}{dt} + v^l \nabla_l \rho = 0$

в) $\nabla_\alpha v^\alpha = 0$.

Здесь 5 уравнений относительно 5 неизвестных $(\rho,\ p,\ v^i)$.

Вопросы:

1. Исходя из а), б), в) привести полную систему уравнений в случае однородной несжимаемой идеальной жидкости.

Указание:

Если среда однородна, то плотность ρ постоянна в частице и одинакова для всех частиц.

2. Записать приведенную выше полную систему уравнений а), б), в)

1) в векторной форме;

2) в проекциях на декартовы оси;

3) в сферической системе координат;

4) в цилиндрической системе координат.

3. Пусть процесс течения идеальной сжимаемой жидкости баротропен, так что в каждой частице среды $p = f(\rho)$, функция $f(\rho)$ считается известной. Привести полную систему уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости в векторной форме.

Выделяют две другие частные модели сплошных сред: модель линейного упругого тела и модель линейной вязкой жидкости.

Упругим телом называется среда, в которой в каждой частице компоненты тензора напряжений

$$p^{ij} = f^{ij}\left(\varepsilon_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \psi_i\right).$$

Вязкой жидкостью называется среда, компоненты тензора напряжений представимы в виде

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij},\ \tau^{ij} = \varphi^{ij}\left(e_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_i\right).$$

Опыты показывают, что во многих твердых телах при обычных условиях (небольшие температура и напряжение) напряжения и деформации связаны между собой законом Гука, а вязкие напряжения и скорости деформаций во многих жидких средах связаны между собой законом Навье-Стокса.

В общем случае малых деформаций закон Гука представим соотношениями

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta},$$

а закон Навье-Стокса (закон вязкости Ньютона) соотношениями

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}.$$

Здесь $A^{ij\alpha\beta}$ и $B^{ij\alpha\beta}$ – компоненты четырехвалентных тензоров, которые являются физическими характеристиками данной сплошной среды. Если свойства среды одинаковы по всем направлениям, то среда изотропна, а если свойства среды в разных направлениях разные, то говорят, что среда анизотропна. Для изотропной среды все коэффициенты $A^{ij\alpha\beta}$, соответственно, $B^{ij\alpha\beta}$ – выра-