

УДК 621.311.22  
ББК 31.37+38.728  
Б43

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор *В.Н. Баранов*,  
ФГБОУ ВПО «Государственный университет по землеустройству» (ГУЗ);  
кандидат технических наук, профессор *И.И. Ранов*, НИУ МГСУ

**Беликов, Александр Борисович.**

Б43 Математическая обработка результатов геодезических измерений [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Б. Беликов, В.В. Симонян ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. гос. строит. ун-т. — 3-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 430 с.). — Москва. : Издательство МИСИ—МГСУ, 2017. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10".

ISBN 978-5-7264-1568-0

Рассмотрены основные вопросы теории погрешностей, необходимые при обработке геодезических результатов измерений. Приведены сведения по теории вероятностей и математической статистик, положенные в основу изложения курса.

Рассмотрены варианты обработки результатов традиционных методов измерений, а также GPS-измерений. Приведены общие сведения по методу наименьших квадратов. Отдельно рассмотрен вопрос применения метода наименьших квадратов к уравниванию геодезических сетей и построению эмпирических формул.

Для аспирантов, обучающихся по направлению 21.06.01 Геология, разведка и разработка полезных ископаемых по программе «Геодезия в строительстве».

УДК 621.311.22  
ББК 31.37+38.728

**Деривативное электронное издание на основе печатного издания:** Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А.Б. Беликов, В.В. Симонян ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. гос. строит. ун-т. — 2-е изд. — Москва. : Издательство МИСИ—МГСУ, 2016. — 432 с. — ISBN 978-7264-1255-9.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-7264-1568-0

© НИУ МГСУ, 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
-------------------	---

## Раздел I. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

<b>ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....</b>	<b>5</b>
-------------------------------------	----------

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ .....	5
----------------------------	---

1.1. Основные понятия .....	5
-----------------------------	---

1.2. Частость и вероятность случайного события .....	7
--	---

1.3. Классическое определение вероятности .....	9
---	---

1.4. Связь между случайными событиями. Условная вероятность .....	10
--	----

1.5. Схемы повторения испытаний .....	12
---------------------------------------	----

1.6. Примеры решения типовых задач .....	14
--	----

1.7. Задачи для самостоятельного решения .....	15
--	----

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ .....	16
-----------------------------	----

2.1. Основные понятия. Функция и плотность распределения .....	16
--	----

2.2. Числовые характеристики случайных величин .....	21
--	----

2.3. Примеры случайных дискретных величин .....	26
---	----

2.4. Примеры случайных непрерывных величин .....	28
--	----

2.5. Центральная предельная теорема Ляпунова .....	37
--	----

2.6. Закон больших чисел .....	38
--------------------------------	----

2.7. Решение типовых задач .....	40
----------------------------------	----

2.8. Задачи для самостоятельного решения .....	44
--	----

3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....	49
------------------------------------	----

3.1. Двумерная случайная величина .....	49
---	----

3.2. Многомерный случайный вектор .....	57
---	----

3.3. Примеры решения типовых задач .....	59
--	----

3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	60
--	----

4. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....	62
---	----

4.1. Свойства математических ожиданий .....	62
---	----

4.2. Свойства дисперсий .....	63
-------------------------------	----

4.3. Свойства третьих центральных моментов .....	64
--	----

4.4. Свойства четвертых центральных моментов .....	65
--	----

4.5. Свойства корреляционной матрицы случайного вектора .....	66
---	----

## Раздел II. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

<b>ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ .....</b>	<b>68</b>
---	-----------

5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ .....	68
---	----

5.1. Понятие генеральной совокупности .....	68
---	----

5.2. Выборка из генеральной совокупности .....	69
--	----

5.3. Основные задачи математической статистики .....	71
--	----

6. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ .....	72
6.1. Общие сведения .....	72
6.2. Методы построения оценок .....	74
6.3. Оценка математического ожидания .....	75
6.4. Оценка дисперсии и среднеквадратического отклонения .....	77
6.5. Оценка моментов .....	81
6.6. Выборочный коэффициент корреляции .....	81
6.7. Примеры решения типовых задач .....	82
6.8. Задачи для самостоятельного решения .....	85
7. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ .....	85
7.1. Общие положения .....	85
7.2. Доверительный интервал для математического ожидания .....	87
7.3. Доверительный интервал для дисперсии .....	89
7.4. Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения .....	90
7.5. Доверительный интервал для выборочного коэффициента корреляции .....	90
7.6. Примеры решения типовых задач .....	91
7.7. Задачи для самостоятельного решения .....	92
8. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ .....	93
8.1. Общие положения по проверке статистических гипотез .....	93
8.2. Сравнение двух средних .....	97
8.3. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней .....	100
8.4. Критерий Аббе .....	101
8.5. Сравнение дисперсий .....	102
8.6. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции .....	104
8.7. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности .....	106
8.8. Примеры решения типовых задач .....	109
8.9. Задачи для самостоятельного решения .....	113
9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ, РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗЫ .....	115
9.1. Общие положения .....	115
9.2. Корреляционный анализ .....	115
9.3. Регрессионный анализ .....	118
9.4. Однофакторный дисперсионный анализ .....	121
9.5. Оценка автокорреляционной функции рядов результатов наблюдений .....	125
9.6. Примеры решения типовых задач .....	128
9.7. Задачи для самостоятельного решения .....	130

<b>Раздел III. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ .....</b>	<b>132</b>
10. ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ .....	132
10.1. Основные определения .....	132
10.2. Классификация измерений .....	135
11. ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	138
11.1. Двойственный характер процесса измерений .....	138
11.3. Аддитивная гипотеза строения погрешности результата измерения. ....	140
11.4. Систематические и случайные погрешности .....	143
11.5. Результат измерения и его погрешность как случайная величина. ....	146
11.6. Числовые характеристики точности измерения .....	149
11.7. Закон распределения результатов измерений и их погрешностей. ....	150
11.8. Оценки числовых характеристик точности измерений .....	151
11.9. Основные задачи, решаемые при помощи теории погрешностей результатов измерений .....	152
11.10. Оценка точности результатов измерений по истинным (действительным) погрешностям .....	154
11.11. Примеры решения типовых задач .....	156
11.12. Задачи для самостоятельного решения .....	158
12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. ....	159
12.1. Основные теоремы. ....	159
12.2. Накапливание погрешностей в основных геодезических действиях .....	162
12.3. Примеры решения типовых задач .....	169
12.4. Задачи для самостоятельного решения .....	174
13. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	177
13.1. Определение веса результата измерения .....	177
13.2. Оценка относительной точности функций результатов измерений. ....	179
13.3. Расчет весов в основных геодезических действиях .....	180
13.4. Примеры решения типовых задач .....	184
13.5. Задачи для самостоятельного решения .....	186
14. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕ- РЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ....	187
14.1. Уравнивание ряда результатов измерений одной и той же величины .....	187
14.2. Уравнивание ряда равноточных измерений одной и той же величины .....	193

14.3. Апостериорная оценка точности при обработке рядов измерений одной и той же величины . . . . .	194
14.4. Порядок математической обработки рядов результатов измерений одной и той же величины . . . . .	200
14. 5. Примеры решения типовых задач . . . . .	201
14. 6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	206
15. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .	208
15.1. Общие принципы . . . . .	208
15.2. Оценка точности угловых измерений по невязкам в полигонах и ходах . . . . .	213
15.3. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Пересеченная местность . . . . .	216
15.4. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Равнинная местность . . . . .	217
15.5. Примеры решения типовых задач . . . . .	219
15.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	222
16. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .	223
16.1. Общие положения . . . . .	223
16.2. Исследование коллимационной погрешности прибора . . . . .	225
16.3. Оценка точности угловых измерений по разностям в полуприемах . . . . .	226
16.4. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Непосредственное измерение линий . . . . .	228
16.5. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Измерение линий свето- и радиодальномерами . . . . .	229
16.6. Оценка точности нивелирования по разностям двойных измерений на станции . . . . .	229
16.7. Оценка точности нивелирования по разностям прямого и обратного превышений . . . . .	230
16.8. Примеры решения типовых задач . . . . .	231
16.9. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	234
17. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ . . . . .	235
17.1. Критерий определения слабодействующих и превалирующих источников погрешностей . . . . .	235
17.2. Об искажении СКП систематическими погрешностями . . . . .	238
17.3. Априорная оценка точности . . . . .	239
17.4. Применение методов теории погрешностей при исследовании приборов . . . . .	243

17.5. Использование дисперсионного анализа при исследовании проб	248
<b>Раздел IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ</b>	256
18. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ	256
18.1. Общие соображения	256
18.2. Математические модели возникновения физической корреляции	258
18.3. Случайный вектор и его числовые характеристики	262
18.4. Оценка точности функций зависимых результатов измерений	265
18.5. Обработка ряда зависимых результатов измерений одной величины	268
18.6. Примеры решения типовых задач	269
18.7. Задачи для самостоятельного решения	274
19. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ	276
19.1. Общие положения	276
19.2. Использование коэффициента корреляции для оценки качества работы GPS-приемников в дифференциальном режиме по разным созвездиям	278
19.3. Использование коэффициента корреляции для определения совместимости различных типов GPS-приемников	281
19.4. Использование коэффициента корреляции для выявления эффекта многолучевости	283
20. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ	287
20.1. Передача дирекционного угла	287
20.2. Получение корреляционной матрицы координат точек теодолитного хода	294
20.3. Учет зависимости между координатами точек теодолитного хода при вычислении площади полигона	299
20.4. Задачи для самостоятельного решения	301
<b>Раздел V. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ</b>	302
21. ПРИНЦИПЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ	302
21.1. Задачи и принципы уравнивания геодезических построений	302
21.2. Основные определения и обозначения	309

21.3. Вывод нормальных уравнений . . . . .	314
21.4. Уравнивание геодезических построений в случае нелинейных параметрических уравнений связи . . . . .	316
21.5. Порядок уравнивания геодезических построений параметрическим методом . . . . .	318
21.6. Порядок составления нормальных уравнений с контролем по суммам . . . . .	319
21.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	322
<b>22. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .</b>	<b>324</b>
22.1. Общие соображения . . . . .	324
22.2. Точные методы . . . . .	324
22.3. Итерационные методы решения систем нормальных уравнений (метод последовательных приближений) . . . . .	336
22.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	339
<b>23. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ УРАВНИВАНИЯ . . . . .</b>	<b>341</b>
23.1. Общие соображения . . . . .	341
23.2. Вычисление величины $\mu^2$ . . . . .	341
23.3. Нахождение обратных весов уравненных значений неизвестных . . . . .	342
23.4. Вычисление обратной матрицы нормальных уравнений в схеме Гаусса . . . . .	345
23.5. Вычисление обратных весов и СКП функций уравненных значений неизвестных . . . . .	347
23.6. Примеры решения типовых задач . . . . .	348
23.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	355
<b>24. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ МЕТОДОМ (МЕТОД УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ) . . . . .</b>	<b>356</b>
24.1. Основные определения и обозначения . . . . .	356
24.2. Вывод нормальных уравнений коррелат . . . . .	358
24.3. Вычисление поправок и уравненных значений результатов измерений. Контроль уравнивания. . . . .	360
24.4. Уравнивание коррелатным методом при нелинейных условных уравнениях . . . . .	362
<b>25. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В КОРРЕЛАТНОМ МЕТОДЕ . . . . .</b>	<b>364</b>
25.1. Вычисление СКП единичного веса . . . . .	364
25.2. Вычисление весов функций уравненных значений неизвестных . . . . .	365
25.3. Вычисление обратных весов функций уравненных значений неизвестных в схеме Гаусса решения систем нормальных уравнений . . . . .	368

25.4. Примеры решения типовых задач .....	369
25. 5. Задачи для самостоятельного решения .....	377
<b>Раздел VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ .....</b>	<b>380</b>
26. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....	380
26.1. Общие положения .....	380
26.2. Общее решение задач по определению параметров полуэмпирических формул .....	381
27. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....	385
27.1. Определение параметров полуэмпирической формулы линейного вида .....	385
27.2. Определение параметров полуэмпирической формулы нелинейного вида .....	391
27.3. Задачи для самостоятельного решения .....	399
28. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА .....	400
28.1. Построение эмпирической формулы методом подбора .....	400
28.2. Построение эмпирической формулы методом параболического интерполирования .....	404
Заключение .....	411
Библиографический список .....	412
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	413