

УДК 510+541.1+577.1  
ББК 28.072  
М93

**Мушкамбаров Н.Н.**

М93 Элементы математики и физической химии для биологов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.Н. Мушкамбаров. — 3-е изд., стер. — М. : ФЛИНТА, 2020. — 439 с. — Т. 3. — 499 с.

ISBN 978-5-9765-2294-7

Учебное пособие дает связное и последовательное изложение многих разделов математики и физической химии. Оно поможет биологам и медикам быстро вспомнить соответствующие сведения, необходимые при анализе научных проблем.

Для студентов, преподавателей и научных сотрудников многих специальностей биологического и медицинского профилей.

УДК 577.01  
ББК 28.072

ISBN 978-5-9765-2294-7

© Мушкамбаров Н.Н., 2015  
© Издательство «ФЛИНТА», 2015

## Оглавление

Предисловие

3

### Раздел I. М А Т Е М А Т И К А

#### Глава 1. Элементарная алгебра

<b>1.1. Последовательности и прогрессии</b>	<b>5</b>
<b>1.2. Степени, логарифмы и факториалы</b>	
1.2.1. Степени	6
1.2.2. Логарифмы	8
1.2.3. Факториалы	10
<b>1.3. Алгебраические уравнения</b>	
1.3.1. системы линейных уравнений.	10
1.3.2. Квадратные и кубические уравнения.	13
<b>1.4. Тригонометрические функции</b>	
1.4.1. Общие представления	15
1.4.2. Некоторые соотношения	16
<b>1.5. Комплексные числа</b>	
1.5.1. Определения	17
1.5.2. Операции с комплексными числами	19

#### Глава 2. Элементы дифференциального и интегрального исчисления

<b>2.1. Производные</b>	
2.1.1. определение	21
2.1.2. Производные суммы, произведения и частного двух функций	22
2.1.3. Производные элементарных функций	23
2.1.4. (★) Производные сложных функций	24
2.1.5. Производные высших порядков и частные производные	25
2.1.6. Градиент скалярной функции нескольких переменных	26

## **2.2. Интегралы**

2.2.1.	Неопределённые интегралы	28
2.2.2.	Методы интегрирования	29
2.2.3.	Определённые интегралы	30
2.2.4.	Численное (приближённое) интегрирование	32
2.2.5.	Несобственные интегралы (I рода)	33

## **2.3. Некоторые приложения дифференциального и интегрального исчисления**

2.3.1.	Исследование функций	34
2.3.2.	Правило Лопиталья	36
2.3.3.	(*) Разложение функций в ряды	36

## **Глава 3. Геометрия**

### **3.1. Параметры некоторых фигур**

3.1.1.	Плоские фигуры	39
3.1.2.	Длина кривой $y(x)$	41
3.1.3.	Спираль	42
3.1.4.	Шар и эллипсоид	42
3.1.5.	Цилиндр и конусы	44

### **3.2. (\*) Укладка фигур**

3.2.1.	Круги	45
3.2.2.	Шары	47

## **Глава 4. Дифференциальные уравнения**

### **4.1. Одиночные дифференциальные уравнения**

4.1.1.	Простейшие уравнения	50
4.1.2.	Уравнения с разделяющимися переменными	50
4.1.3.	Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	51
4.1.4.	Линейные уравнения первого порядка	53
4.1.5.	Численные методы решения	54

### **4.2. Системы двух дифференциальных уравнений**

4.2.1.	Линейные однородные системы: постановка задачи	55
--------	--	----

4.2.2.	Стационарное состояние	56
4.2.3.	Характеристическое уравнение	57
4.2.4.	Установление характера функций $x(t)$ и $y(t)$ по $\lambda_1$ и $\lambda_2$	59
4.2.5.	(*) Вычисление коэффициентов: неколебательные случаи	62
4.2.6.	(*) Вычисление коэффициентов: колебательные случаи	64
4.2.7.	Линейные неоднородные системы	66
4.2.8.	Нелинейные системы	67
4.2.9.	Пример: система Вольтерра	69

## Глава 5. Элементы комбинаторики, теории вероятности и статистики

### 5.1. Некоторые формулы комбинаторики

5.1.1.	Объединение элементов в группы	73
5.1.2.	Перестановки элементов в рядах	76

### 5.2. Вероятностные соотношения

5.2.1.	Вероятность одиночного события и последовательности событий	78
5.2.2.	Вероятность совокупности событий (формула Бернулли)	79
5.2.3.	Условная и полная вероятность	80

### 5.3. Случайные величины

5.3.1.	Распределение случайной величины	81
5.3.2.	Основные параметры распределения	84
5.3.3.	Некоторые законы распределения дискретных случайных величин	86
5.3.4.	Нормальное распределение	88
5.3.5.	Интеграл вероятности при нормальном распределении	89
5.3.6.	Интеграл вероятности для заданного интервала	92
5.3.7.	Распределение Максвелла	93

### 5.4. Оценка результатов выборочного исследования

5.4.1.	Характеристики случайной выборки из генеральной совокупности	94
5.4.2.	Доверительный интервал при известном $\sigma^2$	96
5.4.3.	Распределения "хи-квадрат" и Стьюдента	98
5.4.4.	Доверительный интервал при неизвестном $\sigma^2$	100

### **5.5. Система двух случайных величин**

5.5.1.	Двумерная плотность вероятности.	.101
5.5.2.	Корреляция случайных величин	.103
5.5.3.	Линейная регрессия	.104
5.5.4.	Нормальный закон распределения двумерной случайной величины	.106

## **Р а з д е л II. Ф И З И Ч Е С К А Я Х И М И Я**

### **Глава 6. Основные понятия**

#### **6.1. Важнейшие величины, константы и единицы их измерения**

6.1.1.	Величины и константы	.108
6.1.2.	Метрические единицы массы, длины и объёма	.110
6.1.3.	Единицы измерения силы и давления	.111
6.1.4.	Единицы измерения термодинамических величин	.112
6.1.5.	Единицы измерения электрических величин	.114

#### **6.2. Характеристики содержания вещества: количество, плотность, концентрация**

6.2.1.	Способы выражения количества химических веществ	.115
6.2.2.	Плотность	.116
6.2.3.	(*) Концентрация и способы её выражения	.118
6.2.4.	Концентрация растворённых в жидкости газов	.121

#### **6.3. Характеристики реакций: скорость, константы скорости и равновесия**

6.3.1.	Скорость реакций и её единицы	.122
6.3.2.	Константы скорости	.124
6.3.3.	Обратимые процессы	.125
6.3.4.	Микроскопические константы равновесия	.127

### **Глава 7. Элементы атомно-молекулярной теории**

#### **7.1. Газы**

7.1.1.	Уравнение состояния	.129
--------	---------------------	------

7.1.2.	Молекулярная природа давления и объёма	.131
7.1.3.	Распределение молекул газа по скоростям	.133
7.1.4.	Энергия молекул газа	.135

## **7.2. Атомы и взаимодействия между ними**

7.2.1.	Размеры атомов	.136
7.2.2.	Расстояния между атомами	.138
7.2.3.	Другие характеристики ковалентной связи	.138
7.2.4.	Ионные связи	.139
7.2.5.	Водородные связи	.142
7.2.6.	Ван-дер-ваальсовы связи	.143
7.2.7.	Гидрофобные взаимодействия	.144

## **Глава 8. Кислотно-основное равновесие**

### **8.1. Диссоциация воды и слабых электролитов**

8.1.1.	pH и диссоциация воды	.145
8.1.2.	Диссоциация слабых кислот и слабых оснований	.147
8.1.3.	(±) Влияние заданного pH на степень диссоциации	.149
8.1.4.	Расчёт pH для простейших систем: раствор слабой кислоты	.150
8.1.5.	Расчёт pH для простейших систем (продолжение)	.152
8.1.6.	(*) Изоионная точка аминокислот	.154

### **8.2. Двухосновные кислоты (основания)**

8.2.1.	Уравнение диссоциации	.156
8.2.2.	pH-функции Михаэлиса	.157
8.2.3.	Зависимость $\zeta_1$ от pH	.158
8.2.4.	Определение $K_1$ и $K_2$	.159

### **8.3. Буферные системы**

8.3.1.	Общие сведения	.161
8.3.2.	Уравнение Гендерсона-Хассельбаха	.162
8.3.3.	Влияние на pH буферного раствора сильных кислот и оснований	.163
8.3.4.	Титрование слабой кислоты щёлочью	.166
8.3.5.	(±) Буферная сила	.167
8.3.6.	(±) Буферная ёмкость	.170

## **8.4. Ионная сила растворов и активность ионов**

8.4.1.	Определения . . . . .	172
8.4.2.	Связь между активностью и ионной силой (уравнение Дебая-Хюккеля) . . . . .	174
8.4.3.	Использование уравнения Дебая-Хюккеля . . . . .	177
8.4.4.	Константа высаливания . . . . .	178

## **Глава 9. Термодинамика. Общая часть**

### **9.1. Исходные понятия**

9.1.1.	(*) Предварительные замечания . . . . .	180
9.1.2.	Типы термодинамических систем . . . . .	181
9.1.3.	Типы термодинамических состояний и процессов . . . . .	183
9.1.4.	(*) Пример: изотермическое расширение и сжатие газа . . . . .	184

### **9.1. Первое начало термодинамики**

9.2.1.	Общая формулировка . . . . .	187
9.2.2.	Применение первого начала к различным процессам . . . . .	188
9.2.3.	Энтальпия . . . . .	191

### **9.3. Второе начало термодинамики**

9.3.1.	(*) Общий смысл второго начала . . . . .	192
9.3.2.	Связь энтропии с теплотой обратимого процесса . . . . .	195
9.3.3.	Математические формулировки второго начала термодинамики . . . . .	198

### **9.4. Энтропия: способы вычисления**

9.4.1.	Нагревание и фазовые переходы . . . . .	201
9.4.2.	Третье начало термодинамики и абсолютная энтропия . . . . .	203
9.4.3.	Изотермическое изменение концентрации газов и растворов . . . . .	204
9.4.4.	Статистическая природа энтропии . . . . .	206
9.4.5.	Определение энтропии расчётным путём . . . . .	210

### **9.5. Термодинамические потенциалы**

9.5.1.	Применение второго начала к изолированным системам . . . . .	211
9.5.2.	Изотермические процессы в закрытых системах . . . . .	213
9.5.3.	Процессы в закрытых системах при постоянной энтропии . . . . .	215
9.5.4.	Термодинамические потенциалы для разных процессов . . . . .	219

9.5.5.	(*) Смысл и использование энергии Гиббса . . . . .	220
9.5.6.	Производные энергии Гиббса. Химический потенциал . . . . .	222

## Глава 10. Химическая термодинамика

### 10.1. Осмотические процессы

10.1.1.	$\Delta S_{\text{осм}}$ и $\Delta G_{\text{осм}}$ при постоянных концентрациях в отсеках . . . . .	225
10.1.2.	(*) Расчёт $\Delta G_{\text{осм}}$ при непостоянных концентрациях в отсеках . . . . .	226
10.1.3.	Осмотический потенциал . . . . .	229
10.1.4.	Зависимость химического потенциала от концентрации вещества . . . . .	229

### 10.2. Термодинамические характеристики химических реакций

10.2.1.	Энтальпия (теплота) веществ и реакций . . . . .	231
10.2.2.	Энергия Гиббса химических реакций: определение и уравнение изотермы . . . . .	234
10.2.3.	Анализ уравнения изотермы реакции . . . . .	237
10.2.4.	Расчёт $\Delta G^{\circ}_{\text{рц}}$ и $\Delta S^{\circ}_{\text{рц}}$ . . . . .	240
10.2.5.	(*) Способы определения $\Delta G^{\circ}_{\text{сг}}(X)$ . . . . .	242
10.2.6.	Реакции, идущие с участием водородных ионов . . . . .	244
10.2.7.	Энергия Гиббса сложных процессов . . . . .	247

### 10.3. Зависимость термодинамических характеристик реакции от температуры

10.3.1.	Зависимость $\Delta H^{\circ}_{\text{рц}}$ и $\Delta S^{\circ}_{\text{рц}}$ от $T$ . . . . .	249
10.3.2.	Зависимость $\Delta G^{\circ}_{\text{рц}}$ от температуры . . . . .	251
10.3.3.	Обратимые реакции: зависимость $K_p$ от температуры . . . . .	252

### 10.4. (\*) Модель обратимого осуществления реакции

10.4.1.	Формулировка проблемы . . . . .	256
10.4.2.	Общая схема обратимого проведения реакции в газовой фазе . . . . .	257
10.4.3.	Конкретная модель . . . . .	258
10.4.4.	Баланс теплот . . . . .	260



### Р а з д е л III. Ф И З И Ч Е С К А Я Х И М И Я (продолжение)

#### Глава 11. Кинетика процессов

##### 11.1. Простейшие кинетические уравнения

11.1.1.	Реакции нулевого и первого порядков .	263
11.1.2.	(*) Обратимые процессы первого порядка	265
11.1.3.	Необратимые реакции второго порядка	267
11.1.4.	Необратимые реакции третьего порядка	270

##### 11.2. (\*) Среднее время жизни частиц

11.2.1.	Стационарные системы	271
11.2.2.	Варианты зависимости $T_{\text{ср}}$ от $c_x$	273
11.2.3.	Нестационарные системы .	275

##### 11.3. Кинетика более сложных процессов

11.3.1.	Две параллельные реакции первого порядка .	277
11.3.2.	(*) Две последовательные реакции первого порядка	279
11.3.3.	Фотохимические реакции	282

##### 11.4. Природа константы скорости

11.4.1.	Энергетический барьер и энергия активации .	285
11.4.2.	Энергетическая диаграмма реакции .	287
11.4.3.	Доля активных молекул (закон Больцмана)	289
11.4.4.	Теория активных столкновений	291
11.4.5.	Анализ уравнения Аррениуса . .	293
11.4.6.	Теория активированного комплекса .	295
11.4.7.	Ряд замечаний об энергии Гиббса активации .	298
11.4.8.	Практическое использование формулы Эйринга	301

#### Глава 12. Диффузия

##### 12.1. Природа и законы диффузии

12.1.1.	О чём эта глава	304
12.1.2.	Природа диффузии	304
12.1.3.	Поток и скорость диффузии	306
12.1.4.	Законы диффузии .	307

## 12.2. Диффузия из точки (тонкого слоя)

12.2.1.	Случайные блуждания частиц	311
12.2.2.	Распределение частиц	313
12.2.3.	(*) Одномерный случай: диффузия из тонкого слоя	314
12.2.4.	(*) Одномерный случай: анализ результатов	317
12.2.5.	Трехмерное пространство: диффузия из малой сферы	320
12.2.6.	(*) Трехмерное пространство: зависимость $c(x, t)$	322

## 12.3. Диффузия через границу раздела (одномерный случай)

12.3.1.	(*) Распределение концентрации: вывод формулы	324
12.3.2.	Анализ зависимости $c(x, t)$	326

# Глава 13. Движение незаряженных частиц в жидкости и самой жидкости под действием внешней силы

## 13.1. Вязкость

13.1.1.	Показатели вязкости	328
13.1.2.	Некоторые эмпирические соотношения	331

## 13.2. Движение жидкости через капилляр

13.2.1.	Исходная система	332
13.2.2.	Линейная скорость движения жидкости	334
13.2.3.	Объемная скорость движения (закон Пуазейля)	335

## 13.3. Движение частиц в жидкости

13.3.1.	Частицы произвольной формы	336
13.3.2.	Вывод формулы (13.30)	337
13.3.3.	Частицы сферической формы	339

## 13.4. (\*) Ток жидкости через фильтры

13.4.1.	Модель I: система цилиндрических каналов	341
13.4.2.	Модель II: система сферических препятствий	343

## 13.5. Седиментация частиц

13.5.1.	Самостоятельное осаждение частиц в вязкой жидкости	345
13.5.2.	Центрифугирование частиц произвольной формы	346

13.5.3.	Константа седиментации . . . . .	348
---------	----------------------------------	-----

## Глава 14. Электрохимические явления

### 14.1. Характеристики электрического поля

14.1.1.	Электрический потенциал . . . . .	350
14.1.2.	Разность потенциалов . . . . .	352
14.1.3.	Напряжённость электрического поля . . . . .	353

### 14.2. Биологические мембраны как электрические конденсаторы

14.2.1.	Введение . . . . .	354
14.2.2.	Ёмкость конденсатора . . . . .	355
14.2.3.	Энергия конденсатора . . . . .	357

### 14.3. Движение заряженных частиц в электрическом поле

14.3.1.	Общие формулы скорости и подвижности частиц . . . . .	359
14.3.2.	Природа подвижности . . . . .	360
14.3.3.	Электропроводность растворов . . . . .	362
14.3.4.	Влияние природы, типа и концентрации электролита на его электропроводность . . . . .	365
14.3.5.	Кондуктометрия . . . . .	368
14.3.6.	Движение в электрическом поле макромолекул . . . . .	371
14.3.7.	Движение макромолекул: некоторые соотношения . . . . .	374

### 14.4. Окислительно-восстановительные системы и редокс-потенциалы

14.4.1.	Два типа электродных процессов . . . . .	378
14.4.2.	Дополнительные замечания о гальванических элементах . . . . .	380
14.4.3.	Классификация электродов . . . . .	382
14.4.4.	Формулы расчёта $\Delta\varphi_{\text{рц}}$ (электрического потенциала реакции) . . . . .	387
14.4.5.	Электродные потенциалы . . . . .	390
14.4.6.	Редокс-потенциалы . . . . .	391
14.4.7.	Расчёт характеристик электродов и гальванических элементов . . . . .	394
14.4.8.	Другие расчёты, связанные с редокс-потенциалами . . . . .	396
14.4.9.	Потенциометрия . . . . .	398
14.4.10.	Потенциометрическое титрование . . . . .	401

## Глава 15. Осмотические явления, обусловленные полупроницаемыми мембранами

### 15.1. Осмотическое давление

15.1.1.	Основные сведения . . . . .	404
15.1.2.	Закон Рауля . . . . .	407
15.1.3.	Осмотический потенциал растворителя . . . . .	408
15.1.4.	Точная формула расчёта осмотического давления . . . .	410
15.1.5.	Переход к формуле Вант-Гоффа . . . . .	411

### 15.2. Эффект Гиббса-Доннана

15.2.1.	Качественное описание . . . . .	412
15.2.2.	Объяснение эффекта . . . . .	413
15.2.3.	( <u>а</u> ) Исходные формулы для расчёта $\Delta\pi$ . . . . .	415
15.2.4.	(*) Расчёт $u$ и $x$ . . . . .	417

### 15.3. (\*) Варианты эффекта Гиббса-Доннана

15.3.1.	Макромолекулы находятся по обе стороны полупрони- цаемой мембраны . . . . .	419
15.3.2.	Мембрана проницаема не для всех ионов . . . . .	420

## Глава 16. Радиоактивность

### 16.1. Исходные сведения . . . . . 424

### 16.2. Измерение радиоактивности

16.2.1.	Абсолютная радиоактивность . . . . .	425
16.2.2.	( <u>а</u> ) Удельная радиоактивность . . . . .	425