

УДК 517/519(075)
ББК 22. 161
С91

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *Илюхин А. А.*,
кандидат физико-математических наук, профессор *Ерусалимский В. М.*

*Учебное пособие подготовлено и издано в рамках
национального проекта «Образование»
по «Программе развития федерального государственного образовательного
учреждения «Южный федеральный университет» на 2007–2010 гг.»*

Сушинов А. И., Зуев В. Н., Семенистый В. В.

С91 Курс лекций по уравнениям математической физики с примерами и задачами: учеб. пособие / А. И. Сушинов, В. Н. Зуев, В. В. Семенистый. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. – 307 с.: ил. 27.

ISBN 978-5-9275-0669-9

Книга представляет собой учебное пособие по уравнениям математической физики. В первых шести главах рассматриваются основные типы уравнений с частными производными, их классификация, постановка краевых задач и методы их решения: характеристик (Даламбера), Римана, Фурье. В гл. 7–10 развивается подход, основанный на концепции обобщённого решения: строятся фундаментальные решения для операторов теплопроводности, Лапласа, волнового оператора и оператора Гельмгольца, а затем рассматриваются обобщённые задачи Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа излагается метод потенциалов и метод функций Грина. В тексте разобрано большое количество примеров решения типовых задач, что позволяет изучать уравнения математической физики самостоятельно.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности 010200 «Прикладная математика и информатика» и по направлению 510200 «Прикладная математика и информатика»

ISBN 978-5-9275-0669-9

УДК 517/519(075)
ББК 22.161

© ТТИ ЮФУ, 2009

© А.И. Сушинов, В.Н. Зуев,
В.В. Семенистый, 2009

© Южный федеральный
университет, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	8
§ 1.1. Основные принципы классификации	8
§ 1.2. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка	10
§ 1.3. Характеристические поверхности (характеристики) квазилинейного уравнения второго порядка	13
§ 1.4. Приведение квазилинейного уравнения второго порядка к каноническому виду	15
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	22
§ 2.1. Уравнение колебаний	22
§ 2.2. Уравнение диффузии	26
§ 2.3. Стационарное уравнение	28
§ 2.4. Уравнения гидродинамики	29
§ 2.5. Уравнение Максвелла	30
§ 2.6. Уравнение Шредингера	31
§ 2.7. Классификация краевых задач	33
§ 2.8. Задачи	41
ГЛАВА 3. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК	43
§ 3.1. Метод распространяющихся волн	43
§ 3.2. Физический смысл решения однородного одномерного волнового уравнения	46
§ 3.3. Задача Коши для однородного одномерного волнового уравнения	46
§ 3.4. Фазовая плоскость	50
§ 3.5. Характеристический треугольник	51
§ 3.6. Задачи	56
ГЛАВА 4. МЕТОД РИМАНА	59
§ 4.1. Линейные дифференциальные операторы	59
§ 4.2. Общая задача Коши для гиперболического уравнения	62
§ 4.3. Задача Гурса	64
§ 4.4. Формула Римана	65
§ 4.5. Задачи	75
ГЛАВА 5. МЕТОД ФУРЬЕ	77
§ 5.1. Сущность метода Фурье	77
§ 5.2. Смешанная задача для однородного уравнения колебаний	80
§ 5.3. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний	94
§ 5.4. Смешанная задача для уравнения теплопроводности	102
§ 5.5. Краевая задача для неоднородного стационарного уравнения	113
§ 5.6. Задачи	120
ГЛАВА 6. ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ	124
§ 6.2. Пространства основных и обобщённых функций	126
§ 6.3. Действия с обобщёнными функциями	135
§ 6.4. Свертка обобщённых функций	144
§ 6.5. Преобразование Фурье обобщённых функций	146
§ 6.6. Задачи	153
ГЛАВА 7. МЕТОД ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ	154
§ 7.1. Обобщённое решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными	154
§ 7.2. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами	155
§ 7.3. Метод спуска	158

§ 7.4. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с обыкновенными производными	160
§ 7.5. Фундаментальное решение оператора теплопроводности	163
§ 7.6. Фундаментальное решение волнового оператора	166
§ 7.7. Фундаментальное решение оператора Лапласа	169
§ 7.8. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца	171
§ 7.9. Потенциалы	174
§ 7.10. Обобщённая задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения	187
§ 7.11. Обобщённая задача Коши для уравнения теплопроводности	190
§ 7.12. Обобщённая задача Коши для волнового уравнения	195
§ 7.13. Задачи	200
ГЛАВА 8. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА	205
§ 8.1. Задача на собственные значения	205
§ 8.2. Задача Штурма-Лиувилля	209
§ 8.3. Гармонические функции	220
§ 8.4. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	222
§ 8.5. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца	235
§ 8.6. Интегральные уравнения	241
§ 8.7. Метод потенциалов	244
§ 8.8. Задачи	253
ГЛАВА 9. МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА	257
§ 9.1. Общие свойства решений гипозэллиптических уравнений	257
§ 9.2. Функция Грина	258
§ 9.3. Функция Грина задачи Дирихле в пространстве	260
§ 9.4. Функция Грина задачи Дирихле на плоскости	275
§ 9.5. Задачи	280
ГЛАВА 10. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ	282
§ 10.1. Уравнение Эйлера	282
§ 10.2. Сущность вариационных методов	290
§ 10.3. Метод Ритца	291
§ 10.4. Метод Канторовича	298
§ 10.5. Задачи	303
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	306