

УДК 517.9  
ББК 22.161.6  
Г 852

Интернет-магазин  
**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

---

Работа над книгой велась при финансовой поддержке грантов РФФИ 05-01-00501-а, 08-01-00547-а, 08-01-064-д 11-01-12056-офи-м, гранта 9686.2006.1 Президента РФ ведущим научным школам и гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039.

---

**Гринес В. З., Починка О. В.**

Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 424 с.

Настоящая книга является введением в топологическую классификацию гладких каскадов с гиперболическим неблуждающим множеством, заданных на замкнутых ориентируемых многообразиях размерности два и три. В ней содержатся результаты, полученные авторами сравнительно недавно при сотрудничестве с отечественными и французскими математиками. Основное внимание уделено решению ряда принципиальных проблем, связанных с нетривиальными эффектами, отличающими дискретные динамические системы от соответствующих потоков. Книга содержит обзор сведений из качественной теории динамических систем и смежных дисциплин, позволяющий изучать книгу практически автономно. Она окажется полезной для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, интересующихся вопросами теории динамических систем.

**ISBN 978-5-93972-922-2**

**ББК 22.161.6**

© В. З. Гринес, О. В. Починка, 2011

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Введение</b>	11
<b>Часть 1. Введение в динамические системы</b>	<b>21</b>
ГЛАВА 1.1. <b>Общие понятия</b>	23
1.1.1. Инвариантные множества	23
1.1.2. Топологическая классификация. Устойчивость	29
1.1.3. Гиперболичность. Простейшие гиперболические множества	31
ГЛАВА 1.2. <b>Базисные множества</b>	39
1.2.1. Аксиома А. Теорема о спектральном разложении	39
1.2.2. Трансверсальность. Отсутствие циклов	44
1.2.3. Марковские цепи и соленоиды	48
<b>Часть 2. Общие свойства диффеоморфизмов Морса – Смейла</b>	<b>53</b>
ГЛАВА 2.1. <b>Вложение и асимптотическое поведение инвариантных многообразий периодических точек</b>	55
2.1.1. Представление объемлющего многообразия объединением инвариантных многообразий периодических точек	59
2.1.2. Вложение инвариантных многообразий периодических точек в объемлющее многообразие	61
2.1.3. Топологические инварианты, связанные с вложением инвариантных многообразий периодических точек в объемлющее многообразие	64
2.1.4. Линеаризующая окрестность	71
2.1.5. Асимптотическое поведение инвариантных многообразий периодических точек	75

ГЛАВА 2.2. <b>Функция Морса – Ляпунова. Аттракторы и репеллеры</b>	78
2.2.1. Дiffeоморфизмы «источник-сток»	82
2.2.2. Функция Морса – Ляпунова	84
2.2.3. Аттракторы и репеллеры	85

### **Часть 3. Топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях** **91**

ГЛАВА 3.1. <b>Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов посредством периодических преобразований</b>	93
3.1.1. Структура периодических данных градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности	96
3.1.2. Периодические преобразования и их связь с периодическими данными	99
3.1.3. Построение градиентно-подобного диффеоморфизма по допустимому набору	99

ГЛАВА 3.2. <b>Топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов</b>	103
3.2.1. Взаимосвязь между графом и схемой	108
3.2.2. Достаточные условия топологической сопряженности	111

### **Часть 4. Дикie вложения сепаратрис в 3-многообразие и диффеоморфизмы класса Пикстона** **115**

ГЛАВА 4.1. <b>Вложения в многообразие, фундаментальная группа которого допускает нетривиальный гомоморфизм в группу <math>\mathbb{Z}</math></b>	118
4.1.1. Свойства $\eta_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1}^s$ -существенного тора	121
4.1.2. Критерий тривиальности $\eta_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1}^s$ -существенного узла (тора)	122

ГЛАВА 4.2. <b>Вложение сепаратрис в 3-многообразие</b>	124
4.2.1. Поведение ручной сепаратрисы в окрестности стока	126
4.2.2. Критерий ручного вложения сепаратрис в 3-многообразие	129

ГЛАВА 4.3. <b>Диффеоморфизмы класса Пикстона</b>	131
4.3.1. Топологическая классификация	131
4.3.1.1. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности	133

4.3.1.2. Реализация диффеоморфизмов класса Пикстона . . .	138
4.3.2. Бифуркация вложения сепаратрисы седловой неподвижной точки . . . . .	140
4.3.2.1. О существовании гладкой дуги, соединяющей диффеоморфизмы «Северный полюс – Южный полюс» на $\mathbb{S}^3$ . . . . .	142
4.3.2.2. Построение диффеоморфизмов типа «Северный полюс – Южный полюс» на $\mathbb{S}^6$ , не соединяющихся гладкой дугой . . . . .	150
4.3.2.3. О пути, соединяющем диффеоморфизмы из класса Пикстона . . . . .	151

## **Часть 5. Классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях** 157

ГЛАВА 5.1. Согласованная система окрестностей . . . . .	159
---	-----

ГЛАВА 5.2. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности . . . . .	166
---	-----

## **Часть 6. Взаимосвязь динамики диффеоморфизмов Морса – Смейла с топологией объемлющего 3-многообразия** 175

ГЛАВА 6.1. Классификация 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса – Смейла без гетероклинических кривых	177
6.1.1. Топологическая структура окрестности дикой сферы . . . .	178
6.1.2. Разложение 3-многообразий в связную сумму . . . . .	181

ГЛАВА 6.2. Разбиение Хегора объемлющего 3-многообразия градиентно-подобного диффеоморфизма . . . . .	187
6.2.1. Структура окрестности аттрактора $A_f$ (репеллера $R_f$ ) . . .	188
6.2.2. Разбиение Хегора объемлющего 3-многообразия для градиентно-подобного диффеоморфизма . . . . .	190

## **Часть 7. Энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях** **191**

ГЛАВА 7.1. Функция Морса–Ляпунова . . . . .	194
7.1.1. Свойства функции Ляпунова . . . . .	195
7.1.2. Типичность функций Морса–Ляпунова . . . . .	198
ГЛАВА 7.2. Динамически упорядоченная энергетическая функция	201
7.2.1. Необходимые условия существования . . . . .	204
7.2.2. Построение энергетической функции . . . . .	205
7.2.3. Критерий существования энергетической функции на трех- мерной сфере . . . . .	213

## **Часть 8. Свойства нетривиальных базисных множеств $A$ -диффеоморфизмов, связанные с типом и размерностью** **215**

ГЛАВА 8.1. Нетривиальные аттракторы и репеллеры $A$ -диффеоморфизмов . . . . .	217
8.1.1. Условия, выделяющие среди базисных множеств аттракторы и репеллеры . . . . .	218
8.1.2. Локальная структура растягивающегося аттрактора (сжимающегося репеллера) . . . . .	221
ГЛАВА 8.2. Базисные множества типов $(n-1, 1)$ и $(1, n-1)$ . . .	222
8.2.1. Примеры базисных множеств типов $(n-1, 1)$ и $(1, n-1)$ .	224
8.2.1.1. Подкова Смейла . . . . .	224
8.2.1.2. Диффеоморфизмы Аносова . . . . .	225
8.2.1.3. $DA$ -диффеоморфизм . . . . .	226
8.2.1.4. Аттрактор Плыкина . . . . .	227
8.2.1.5. Соленоид Смейла–Вильямса . . . . .	229
8.2.1.6. Примеры $A$ -диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами разных размерностей . . .	230
8.2.2. Поведение одномерных устойчивых (неустойчивых) многообразий точек базисных множеств типов $(n-1, 1)$ и $(1, n-1)$ . Существование граничных точек . . . . .	231

## **Часть 9. Классификация нетривиальных базисных множеств $A$ -диффеоморфизмов поверхностей** **239**

<b>ГЛАВА 9.1. Асимптотическое поведение на универсальном накрывающем пространстве прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий точек просторно расположенных базисных множеств</b>	<b>242</b>
9.1.1. Построение квазитрансверсали	244
9.1.2. Случай поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой	247
9.1.3. Случай двумерного тора	250
<b>ГЛАВА 9.2. Классификация двумерных базисных множеств</b>	<b>258</b>
9.2.1. $A$ -диффеоморфизмы поверхности с двумерным базисным множеством	259
9.2.2. Классификация диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе	260
<b>ГЛАВА 9.3. Классификация одномерных базисных множеств</b>	<b>265</b>
9.3.1. Построение канонической формы аттрактора	270
9.3.2. Асимптотическое поведение прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий точек аттрактора на универсальном накрывающем пространстве канонического носителя	273
9.3.3. Доказательство классификационной теоремы	280
9.3.4. Гиперболичность автоморфизма фундаментальной группы носителя	284
9.3.5. Представление одномерных аттракторов геодезическими ламинациями	286
9.3.6. Свойство отделимости одномерного аттрактора (репеллера) структурно устойчивого диффеоморфизма поверхности	290
<b>ГЛАВА 9.4. Классификация одномерных просторно расположенных аттракторов диффеоморфизма тора <math>T^2</math></b>	<b>292</b>
9.4.1. Свойства поднятия полусопрягающего отображения	293
9.4.2. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности	296
<b>ГЛАВА 9.5. Классификация нульмерных базисных множеств без пар сопряженных точек</b>	<b>298</b>

## Часть 10. Топологические основы динамических систем 303

ГЛАВА 10.1. Группы. Линейные и метрические пространства . . .	305
10.1.1. Множества и отображения . . . . .	305
10.1.2. Группы . . . . .	308
10.1.3. Линейные пространства . . . . .	311
10.1.4. Метрические пространства . . . . .	314
ГЛАВА 10.2. Основы алгебраической топологии . . . . .	317
10.2.1. Топологические пространства . . . . .	317
10.2.2. Фактортопология . . . . .	324
10.2.3. Компактность . . . . .	329
10.2.4. Хаусдорфовость . . . . .	331
10.2.5. Связность и линейная связность . . . . .	332
10.2.6. Фундаментальная группа . . . . .	334
10.2.7. Вычисление фундаментальных групп . . . . .	335
10.2.7.1. Накрытия. Поднятия . . . . .	335
10.2.7.2. Действие группы на топологическом пространстве . . . . .	337
10.2.8. Группы гомологий . . . . .	341
10.2.8.1. Симплициальные гомологии . . . . .	341
10.2.8.2. Сингулярные гомологии . . . . .	347
10.2.8.3. Клеточные гомологии . . . . .	349
ГЛАВА 10.3. Многообразия и отображения . . . . .	352
10.3.1. Многообразия . . . . .	352
10.3.2. Поверхности . . . . .	355
10.3.3. Дифференцируемые структуры . . . . .	358
10.3.4. Подмногообразия, иммерсии, субмерсии, вложения . . . . .	363
10.3.5. Дикие вложения . . . . .	364
10.3.6. Касательное пространство. Векторные поля . . . . .	368
10.3.7. Гомотопические свойства гомеоморфизмов поверхностей . . . . .	374
10.3.7.1. Универсальное накрытие поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой . . . . .	375
10.3.7.2. Свойства автоморфизмов группы скольжений. Геодезические ламинации . . . . .	378
10.3.7.3. Связь между теориями Нильсена и Терстена . . . . .	381
10.3.8. Пространства отображений . . . . .	383
10.3.9. Некоторые важные свойства отображений . . . . .	386
10.3.10. Изотопии . . . . .	388

---

10.3.11. Вложение поверхности в 3-многообразие . . . . .	390
10.3.12. Функция Морса . . . . .	391
10.3.13. Ламинации и слоения . . . . .	396
<b>Литература . . . . .</b>	<b>400</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>412</b>