МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Е.П. Белоусова
Т.И. Смагина

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2016

Настоящие методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов, изучающих курс функционального анализа, а также при подготовке к экзамену по этому курсу. В начале каждого раздела приводятся необходимые теоретические сведения, даются образцы решения задач, а затем предлагаются задания для самостоятельной работы. При подборке задач и упражнений использовалась приведенная ниже литература.

Литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ/ В.А. Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004. - 570 с.
3. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа/ В.И. Соболев. – М.: Наука, 1968. – 286 с.
4. Люстерник Л.А. Краткий курс функциональго анализа/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: «Лань», 2009. – 272 с.
5. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002. – 239 с.
6. Антоневич А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения/ А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2003. – 430 с.
7. Ульянов П.Н. Действительный анализ в задачах/ П.Н. Ульянов и [др.]. – М.: Физматлит, 2005.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2);$$

б) тождество Апполония

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2 \quad .$$

3. Провести процесс ортогонализации для функций $1, t, t^2, \ldots$ в $L_2[-1,1]$ и показать, что $e_1(t)=1,\quad e_2(t)=t,\quad e_3(t)=t^2-\frac{1}{3},\quad e_4(t)=t^3-\frac{3t}{5}$. Эти многочлены называются многочленами Лежандра.

2. Расстояние от точки до подпространства. Ряд Фурье

Пусть L - подпространство в гильбертовом пространстве $H, x \in H$, но $x \notin L$. ***Расстоянием от точки до подпространства*** L называется число

$$\rho(x,L)=\inf_{u \in L}\|x-u\|.$$

Теорема 1. Существует единственный элемент $y \in L$, реализующий расстояние от точки x до подпространства $L \subset H$

$$\rho(x,L)=\|x-y\|,$$

при этом элемент $x-y$ ортогонален пространству L.

Замечание. Элемент $y \in L$ называется ***ортогональной проекцией*** элемента x на подпространство L.

Пусть $x \in H$ и $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональная система в H. Числа $c_k=\frac{(x,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$ $(k=1,2,\ldots)$ называются ***коэффициентами Фурье***, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ называется ***рядом Фурье*** элемента x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$. Многочлен $\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ называется ***многочленом Фурье*** элемента x.

Теорема 2. Пусть система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ ортогональна в H, а L_n - подпространство, натянутое на функции $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$. Тогда $d_n=\rho(x,L_n), x \in H$, задается следующими формулами

$$d_n = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|,$$

$$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 ,$$

где c_k $(k = 1,2,...)$ - коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Ортогональная система векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \in H$ называется ***полной***, если ряд Фурье, составленный для любого $x \in H$, сходится к x.

Полная ортогональная система называется ортогональным ***базисом*** пространства H.

Пример. Для функции e^t найти многочлены $p_n(t)$ степени $n = 0,1,2$ такие, что норма $\|e^t - p_n(t)\|$ минимальна в пространстве $L_2[-1,1]$.

Решение. Согласно теореме 2 надо построить многочлены Фурье степени 0, 1, 2 для функции $x(t) = e^t$. Вычислим коэффициенты Фурье функции $x(t)$, взяв в качестве ортогональной системы многочлены Лежандра $\varphi_1(t) = 1,\ \varphi_2(t) = t,\ \varphi_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}$, которые ортогональны. Имеем $p_0(t) = c_0 \varphi_1(t)$, где

$$c_0 = \frac{(x, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^t\, dt = \frac{1}{2}(e - e^{-1}).$$

Следовательно, $p_0(t) = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$. Построим $p_1(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot t$. Непосредственным вычислением находим, что

$$c_1 = \frac{(e^t, t)}{(t,t)} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} t\, e^t\, dt = \frac{3}{e}.$$

Таким образом, $p_1(t) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + \frac{3}{e} t$. Для построения $p_2(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot (t^2 - \frac{1}{3})$ вычислим c_2. Имеем

$$c_2 = \frac{(e^t, t^2 - \frac{1}{3})}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} \right\|^2} = \frac{15}{4}(e - 7e^{-1}).$$

Следовательно, $p_2(t) = -\frac{3}{4}(e - 10e^{-1}) + \frac{3}{e}t + \frac{15}{4}(e - 7e^{-1})t^2$.

Задания для самостоятельного решения

1. Показать, что в пространстве R_∞^2 расстояние от элемента $x_0 = (1,0)$ до подпространства $L = \{(0,\alpha), \alpha \in R\}$ имеет вид $U = \{(0,\beta), \beta \in [-1,1]\}$.

2. В пространстве R_1^2 найти расстояние от элемента $x_0 = (0,2)$ до подпространства $L = \{(\alpha,\alpha), \alpha \in R\}$.

3. Найти, при каких значениях параметра β расстояние от элемента $x_0 = (\beta,1)$ до подпространства $L = \{(0,\alpha), \alpha \in R\}$ в пространстве R_3^2 не превосходит $\ln 3$.

4. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x(t) \equiv 1$ до подпространства $L = \{y(t) \in C[0,1] : y(0) = 0\}$. Описать множество элементов наилучшего приближения.

5. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние:

   а) от элемента $x(t) = t$ до подпространства многочленов нулевой степени;
   б) от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства многочленов степени не более 1.

6. В подпространствах а) $L_2[0,1]$; б) $L_2[-1,1]$ найти проекцию элемента $x(t) = t^3$ на подпространство многочленов степени не более n, если $n = 0,1,2$.

3. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора

Пусть X и Y - линейные нормированные пространства. Отображение $A : D(A) \subset X \to Y$ называется ***линейным оператором***, если $D(A)$ - линейное многообразие в пространстве X и для всех $x, y \in D(A)$ и скаляров α, β имеет место соотношение $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Множество $D(A)$ называют ***областью определения***, а $R(A) = \{y \in Y : (\exists x \in D(A))[y = Ax])\}$ - ***множество значений*** оператора A.

Оператор $A: X \to Y$ называется ***непрерывным в точке*** x_0, если из того что $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что $\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$. Если линейный оператор непрерывен в любой точке пространства, то он называется просто ***непрерывным.***

Линейный оператор $A: X \to Y$ называется ***ограниченным,*** если существует такая константа $M \ge 0$, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X . \tag{1}$$

Теорема. Линейный оператор $A: X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Нормой $\|A\|$ оператора A называют наименьшую из констант, для которых выполнено условие (1).

Имеют место равенства

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y .$$

замечание

Пример 1. Пусть φ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Рассмотрим отображение $A: C[a,b] \to C[a,b]$, определяемое соотношением

$$(Ax)(t) = \varphi(t)x(t) .$$

Доказать, что A - линейный ограниченный оператор и найти его норму.

Решение. Линейность следует из соотношения

$$(A(\alpha x + \beta y))(t) = \varphi(t)(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t) .$$

Покажем , что A - ограниченный оператор. Имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{t \in [a,b]} |(Ax)(t)| = \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)x(t)| \le \|\varphi\|_C \|x\|_C ,$$

поэтому $\|A\|_C \le \|\varphi\|_C$.

Докажем, что $\|A\| = \|\varphi\|_C$. Рассмотрим функцию $x_0(t) \equiv 1$. Очевидно, что $\|x_0\|_C = 1$ и $\|Ax_0\|_C = \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)| = \|\varphi\|_C$. Таким образом, $\|A\| = \|\varphi\|_C$.

Пример 2. Показать, что оператор $A: l_2 \to l_2$, задаваемый для вектора $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$ соотношением

$$Ax = (\frac{x_1}{2}, \frac{2x_2}{3}, ..., \frac{kx_k}{k+1}, ...)$$

линеен, ограничен в пространстве l_2, и найти его норму.

Решение. Линейность вытекает из правила сложения и умножения на число в пространстве l_2. Для доказательства ограниченности покажем оценку (1), когда $X = Y = l_2$. Имеем

$$\|Ax\|_{l_2}^2 = \sum_{k\geq 1} |(Ax)_k|^2 = \sum_{k\geq 1} (\frac{k}{k+1})^2 |x_k|^2 \leq \sum_{k\geq} |x_k|^2 = 1 \cdot \|x\|_{l_2}^2 . \qquad (2)$$

Следовательно, $\|A\| \leq 1$. Из анализа знака неравенства видно, что найти элемент, на котором бы в (2) достигался знак равенства, не удается. Однако, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое n, что $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$. Тогда для $e_n = (\underbrace{0,...,0,1}_{n},0,...) \in l_2$ имеем

$$\|Ae_n\|_{l_2} = \frac{n}{n+1} > (1-\varepsilon)\|e_n\|_{l_2} .$$

Поэтому $\|A\| = 1$.

Пример 3. Доказать непрерывность и найти норму оператора

$$(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s) ds$$

для а) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, б) $A: L_2[0,1] \to C[0,1]$.

Решение. Так как оператор линеен, то для доказательства непрерывности достаточно проверить его ограниченность.

В случае а) имеем оценку

$$\|Ax\|_C = \max_{t\in[0,1]} \left| t^2 \int_0^1 s x(s) ds \right| \leq \int_0^1 s |x(s)| ds \leq \frac{1}{2} \|x\|_C .$$

ŋqdbyeY bɐ dəqɐbyɜə d ɛɑɑбɔy ɐqdbYqyè