

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический  
университет им. Л. Н. Толстого»

**И. В. Денисов, Т. Ю. Денисова,  
Н. М. Исаева, В. А. Шулюпов**

# **ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

*Учебное пособие*

Под редакцией И. В. Денисова

Тула  
Издательство ТГПУ им. Л. Н. Толстого  
2015

ББК 22.16я73  
Д33

*Рецензенты:*

доктор физико-математических наук, профессор *И. М. Буркин*  
(Тульский государственный университет);  
доктор физико-математических наук *И. В. Добрынина*  
(Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого)

**Денисов, И. В.**

Введение в анализ математических моделей: Учеб. пособие /  
Д33 И. В. Денисов, Т. Ю. Денисова, Н. М. Исаева, В. А. Шулюпов;  
Под ред. И. В. Денисова. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та  
им. Л. Н. Толстого, 2015. – 59 с.

ISBN 978-5-87954-912-6

Учебное пособие разработано в соответствии с программой дисциплин «Математические модели и методы в технологии» и «Математические модели и методы в технологии и экономике». В каждый параграф кроме теоретических положений включено большое количество примеров и задач, способствующих активному усвоению материала. Представлено 25 вариантов индивидуальных заданий.

Пособие предназначено студентам высших учебных заведений, обучающимся по специальностям 35.03.06 «Агроинженерия» (профиль «Технические системы в агробизнесе»), 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 43.03.01 «Сервис» (профили «Сервис инженерных систем гостинично-ресторанных, туристических и спортивных комплексов»), «Сервис недвижимости», «Сервис транспортных средств», 44.03.05 «Педагогическое образование» (профили «Технология» и «Экономика»).

**ББК 22.16я73**

ISBN 978-5-87954-912-6

© И. В. Денисов, Т. Ю. Денисова, Н. М. Исаева,  
В. А. Шулюпов, 2015  
© ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2015

## Введение

Предлагаемое учебное пособие открывает цикл пособий по курсу «Математические модели и методы в технологии». Математические модели представляют собой формализованное отражение реальных процессов природы и общества. Развитие процесса можно характеризовать положением, скоростью и другими изменяющимися параметрами. Для отражения подобных зависимостей существует понятие функции – основного объекта «Математического анализа». Основной операцией изучения функций является предельный переход или понятие бесконечно малой величины. Открывает изучение математического анализа тема «Введение в анализ», основная для всех последующих курсов. Далее изучается дифференциальное и интегральное исчисления, теория рядов, дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ и т. д.

В отличие от известных учебников в предлагаемом пособии выделяются основные положения и принципы теории и практики математического анализа. Например, во введении в анализ выделяется представление функции вблизи её значения в виде суммы **числа** и бесконечно малой относительно этого числа добавки. В дифференциальном исчислении бесконечно малая добавка представляется как сумма **линейной функции** и бесконечно малой относительно этой функции добавки. Оказывается, что бесконечно малые добавки можно уточнять до любой **степенной функции**. Получается представление нелинейной функции с помощью суммы числа, линейной, квадратичной, кубической и т. д. функций.

Вчерашний школьник испытывает значительные трудности при адаптации к университетскому обучению. Предлагаемое учебное пособие призвано сгладить процесс адаптации, в связи с чем, наряду с традиционными темами предела и непрерывности функций пособие содержит материал школьного курса математики. В частности, приводятся сведения об основных элементарных функциях и их графиках, составляющих основу изучения «Математического анализа». Это оправдано тем, что, к сожалению, выпускники школ недостаточно подготовлены в этом направлении. Авторы надеются, что пособие будет способствовать упорядочению начальных знаний в области математического анализа как аппарату изучения математических моделей.

Каждый из авторов внес свой вклад в написание предлагаемого пособия. Считаем, что совместная работа творческого коллектива окажется полезной для повышения уровня математического образования студентов.

## § 1. Множество действительных чисел

### Обозначения:

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел,  
 $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел,  
 $\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел,  
 $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел.  
 $\forall$  – для любого,  
 $\exists$  – существует,  
 $\equiv$  – равно по определению.

**Действительные числа:**  $\mathbb{R}$  – множество чисел, для которых выполняются

- 1) аксиомы сложения;
- 2) аксиомы умножения;
- 3) дистрибутивность умножения относительно сложения;
- 4) аксиомы порядка;
- 5) аксиома непрерывности.

Первые четыре группы аксиом подробно рассматриваются в курсе алгебры.

**Аксиома непрерывности действительных чисел:** *если  $A$  и  $B$  – непустые подмножества множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  такие, что для любых элементов  $a \in A$  и  $b \in B$  выполняется неравенство  $a \leq b$ , то существует такой элемент  $c \in \mathbb{R}$ , что для любых элементов  $a \in A$  и  $b \in B$  выполняется неравенство  $a \leq c \leq b$ .*

Аксиома непрерывности, в частности, позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и точками числовой оси.

**Расширенное множество действительных чисел**  $\bar{\mathbb{R}}$  – это множество действительных чисел, дополненное двумя символами  $\pm\infty$ . Под символом  $\infty$  понимают  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Грани множеств.** Множество  $E \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \geq m$$

(число  $m$  называется *нижней гранью* множества  $E$ ).

Множество  $E \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным сверху*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leq M$$

(число  $M$  называется *верхней гранью* множества  $E$ ).

Множество  $E$  называется *ограниченным*, если оно ограничено и снизу и сверху.

Число  $m$  называется *точной нижней гранью* множества  $E$ , пишут  $m = \inf E$ , если

- 1)  $\forall x \in E \quad x \geq m$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad x < m + \varepsilon$ .

Число  $M$  называется *точной верхней гранью* множества  $E$ , пишут  $M = \sup E$ , если

- 1)  $\forall x \in E \quad x \leq M$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad x > M - \varepsilon$ .

Число  $m$  называется *наименьшим элементом* множества  $E$ , пишут  $m = \min E$ , если

- 1)  $m \in E$ ;
- 2)  $\forall x \in E \quad x \geq m$ .

Число  $M$  называется *наибольшим элементом* множества  $E$ , пишут  $M = \max E$ , если

- 1)  $M \in E$ ;
- 2)  $\forall x \in E \quad x \leq M$ .

**Пример.** Рассмотрим множество  $E = (0, 1]$ . Наименьшего элемента нет,  $\inf E = 0$ ,  $\max E = \sup E = 1$ .

Множество действительных чисел обладает свойством *полноты*, которое выражается следующим предложением.

**Теорема.** *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. (Всякое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.)*

**Принцип математической индукции.** Утверждение  $A(n)$  считается верным для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq t$ , если

- 1)  $A(t)$  – верно;
- 2) из предположения, что  $A(k)$ ,  $k \geq t$ , верно, следует верность  $A(k+1)$ .

По принципу математической индукции можно доказать, например, *неравенство Бернулли*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > -1.$$

**Модуль** (или *абсолютная величина*) действительного числа  $a$  – это величина

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

§ 1. Множество действительных чисел

Геометрически модуль действительного числа означает расстояние на числовой оси соответствующей точки до нуля. Модуль разности двух чисел – это расстояние между соответствующими точками числовой оси.

Свойства модуля:

- 1)  $|a| = |-a|$ ;
- 2)  $|ab| = |a||b|$ ;
- 3)  $|a| < b$  эквивалентно  $-b < a < b$ ,  $b > 0$ ;
- 4)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;
- 5)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

**Система вложенных отрезков** – это совокупность отрезков  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ , удовлетворяющих условию

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

**Принцип вложенных отрезков Кантора.** Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно действительное число, принадлежащее всем отрезкам системы.

Система вложенных отрезков называется *стягивающейся*, если длины отрезков стремятся к нулю:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon.$$

**Теорема.** Для всякой стягивающейся системы вложенных отрезков существует единственная общая точка.

## § 2. Основные элементарные функции

Функцией  $f: X \rightarrow Y$  называется закон, по которому каждому элементу  $x$  из множества  $X$  ставится в соответствие единственный элемент  $y$  из множества  $Y$ .

Функцию принято записывать в виде  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ . Множество  $X$  называется *областью определения функции*:  $X = D_f$ . Множество  $Y$  называется *множеством значений функции*:  $Y = E_f$ . *Графиком функции*  $f: X \rightarrow Y$  называется множество упорядоченных пар точек

$$\Gamma_f = \{(x, y) | x \in X, y = f(x)\}.$$

В средней школе изучаются *основные элементарные функции*:

- 1) *постоянная функция*  $y = c$ ;
- 2) *степенные функции*  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- 3) *показательные функции*  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 4) *логарифмические функции*  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 5) *тригонометрические функции*  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$   
и  $y = \operatorname{ctg} x$ ;
- 6) *круговые (обратные тригонометрические) функции*  $y = \arcsin x$ ,  
 $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$  и  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

График постоянной функции представлен на рис. 1.

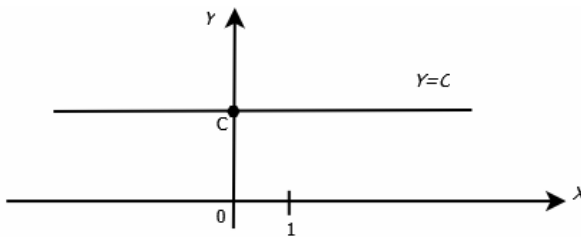


Рис. 1

Поведение графика степенной функции определяется величиной показателя  $\alpha$ :  $\alpha > 1$  или  $0 < \alpha < 1$ . Например, поведение графиков функций  $y = x^2$ ,  $x > 0$ , и  $y = x^{1/2}$ ,  $x > 0$ , представлено на рис. 2.

## § 2. Основные элементарные функции

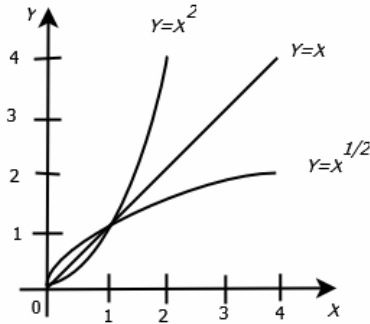


Рис. 2

Функции  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$  называются *взаимно обратными*, если выполняются условия:

- 1) для любого  $x \in X$  значения  $g(f(x)) = x$ ;
- 2) для любого  $y \in Y$  значения  $g(f(y)) = y$ .

Функции  $y = x^2, x > 0$ , и  $y = x^{1/2}, x > 0$ , являются взаимно обратными. Функцию  $y = x^{1/2}, x > 0$ , можно представить в виде  $x = y^2, y > 0$ . Поэтому графиком функции  $y = x^{1/2}, x > 0$ , является график функции  $y = x^2, x > 0$ , если оси координат  $OX$  и  $OY$  поменять местами. Расположение графиков взаимно обратных функций характеризуется симметрией относительно прямой  $y = x$ . Для взаимно обратных функций сохраняется характер монотонности: возрастание, либо убывание.

Некоторые степенные функции определены на всей числовой оси, например, функция  $y = x^2$ . Эта функция четная, т. к.  $f(-x) = f(x)$ . Её график называется *параболой*, он симметричен относительно оси  $OY$  (см. рис. 3а).

Функция  $y = x^3$  также определена на всей числовой оси. Эта функция нечетная, т. к.  $f(-x) = -f(x)$ . Её график называется *кубической параболой*, он симметричен относительно точки  $O$  (см. рис. 3б).

Степенные функции при  $\alpha < 0$  можно рассмотреть на примере функций  $y = x^{-2}, x > 0$ , и  $y = x^{-1/2}, x > 0$ , которые являются взаимно обратными. Их графики симметричны относительно прямой  $y = x$  (см. рис. 4).



§ 2. Основные элементарные функции

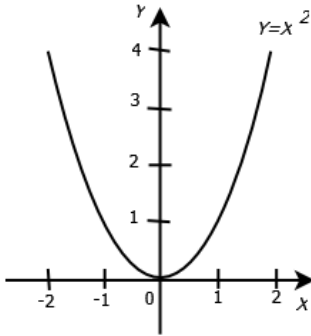


Рис. 3а

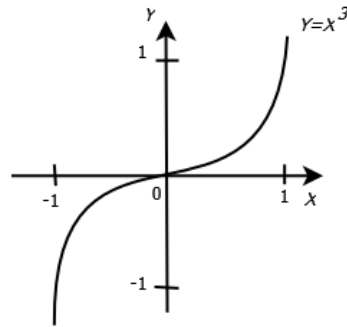


Рис. 3б

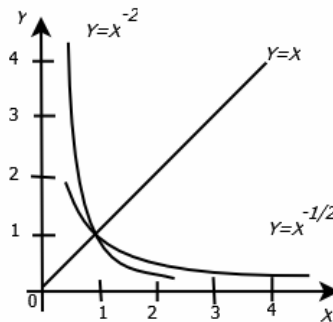


Рис. 4

Функция  $y = x^{-1}$  определена на множестве  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Её график называется гиперболой, он симметричен относительно прямых  $y = x$  и  $y = -x$ . Обратной является сама функция  $y = x^{-1}$  (см. рис. 5).

Показательные функции определены на всей числовой оси. Поведение графика показательной функции определяется величиной основания:  $a > 1$  или  $0 < a < 1$ . Например, графики функций  $y = 2^x$  и  $y = (1/2)^x$  представлены на рис. 6, они симметричны относительно оси  $OY$ .

§ 2. Основные элементарные функции

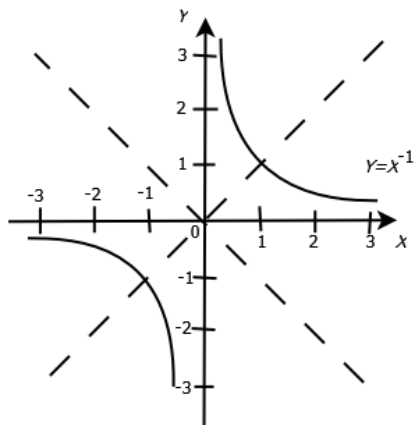


Рис. 5

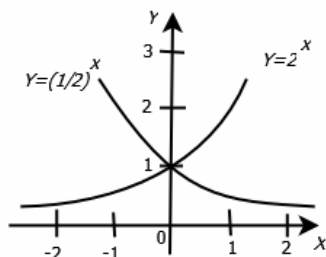


Рис. 6

Функции, обратные для показательных, составляют класс логарифмических функций. Функцию  $y = \log_a x$  можно представить в виде  $x = a^y$ . Поэтому графиком функции  $y = \log_a x$  является график функции  $x = a^y$ , если оси координат  $OX$  и  $OY$  поменять местами. Логарифмические функции определены на множестве значений показательных функций, т. е. при  $x > 0$ . Графики функций  $y = \log_2 x$  и  $y = \log_{1/2} x$  симметричны относительно оси  $OX$  (см. рис. 7).

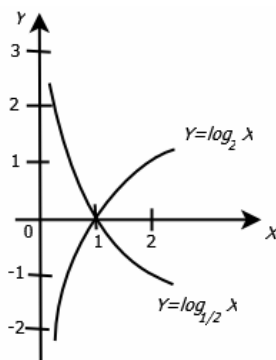


Рис. 7