МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Звягин

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО АЛГЕБРЕ.
БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2018

Оглавление

самое, при перемножении p-ой строки матрицы $T^T_{ee'}$, на q-ый столбец матрицы C, т.е. b_{pq} является элементом, стоящим в p-ой строке и q-ом столбце матрицы $T^T_{ee'}C = T^T_{ee'}A_eT_{ee'}$. Таким образом,

$$A_{e'} = T^T_{ee'}A_eT_{ee'}. \tag{1.2}$$

Определение 1.4. *Билинейная форма $A(x, y)$ называется вырожденной, если ранг билинейной формы $A(x, y)$ меньше размерности пространства R, и невырожденной, если ранг билинейной формы $A(x, y)$ равен размерности пространства R.*

Теорема 1.1. *Билинейная форма $A(x, y)$ вырождена тогда и только тогда, когда существует вектор $x \neq \theta$ такой, что $A(x, y) = 0$, для любого $y \in R$.*

Доказательство. Пусть $e : e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис R и $A_e = (a_{ij})$ — матрица билинейной формы $A(x, y)$ в этом базисе. Соотношение $A(x, y) = 0$, для любого $y \in R$, равносильно системе равенств $A(x, e_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, n$, или, если учесть разложение $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, системе равенств $\sum_{i=1}^n x_iA(e_i, e_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Значит, билинейная форма $A(x, y)$ вырождена тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений (1.3) имеет нетривиальное решение, то есть когда ранг матрицы A_e меньше n. □

Замечание 1.3. *Так как матрица перехода $T_{ee'}$ (а значит, и $T^T_{ee'}$) является невырожденной (т.е. имеет ранг n), то ранг матрицы $A_{e'}$ равен рангу матрицы A. Таким образом, ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса, и поэтому может быть назван рангом самой билинейной формы.*

Замечание 1.4. *Отметим, что при изменении базиса матрица билинейной формы меняется иначе, чем матрица линейного оператора $(A_e = T^{-1}_{ee'}A_eT_{ee'})$.*

Определение 1.5. *Билинейная форма $A(x, y)$ называется симметрической, если $A(x, y) = A(y, x)$, $\forall x, y \in R$, и кососимметрической, если $A(x, y) = -A(y, x)$, $\forall x, y \in R$.*

Замечание 1.5. *Матрица симметрической билинейной формы в любом базисе будет симметрической, а матрица кососимметрической билинейной формы будет кососимметрической.*

Действительно, если $e : e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства R, то для симметрической билинейной формы $A(x, y)$ имеем

$$a_{ij} = A(e_i, e_j) = A(e_j, e_i) = a_{ji}.$$

Следовательно, $A'_e = A_e$. Для кососимметрической билинейной формы имеем

$$a_{ij} = A(e_i, e_j) = -A(e_j, e_i) = -a_{ji}.$$

Следовательно, $A'_e = -A_e$.

Замечание 1.6. *Для кососимметрической билинейной формы $A(x, y)$ справедливо равенство $A(x, x) = 0$, $\forall x \in R$. Отсюда, в частности, следует $a_{ii} = A(e_i, e_i) = 0$, т.е. диагональные элементы матрицы кососимметрической билинейной формы равны нулю.*

Замечание 1.7. *Всякая билинейная форма $A(x, y)$ может быть представлена в виде сумма симметрической и кососимметрической билинейных форм.*

Действительно, $A(x, y) = B(x, y) + C(x, y)$, где $B(x, y) = \frac{1}{2}(A(x, y) + A(y, x))$ — симметрическая билинейная форма, а $C(x, y) = \frac{1}{2}(A(x, y) - A(y, x))$ — кососимметрическая билинейная форма.

Теорема 1.2. *Пусть R — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ и $e : e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис R. Для любых чисел $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, существует, и притом единственная, билинейная форма $A(x, y)$ в пространстве R, для которой $A(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть $e : e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства R и a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — заданные числа. Отображение

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

где $\forall x, y \in R$ и $x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, является билинейной формой в пространстве R, причем $A(e_i, e_j) = a_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что любая билинейная форма $B(x, y)$ в пространстве R, для которой $B(e_i, e_j) = a_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$, совпадает с $A(x, y)$. В самом деле, для любых векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum_{i,j=1}^{n} y_i e_i$ в силу определения билинейной формы имеем

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij},$$

т.е. $B(x, y) = A(x, y)$ для $\forall (x, y \in R)$. □

Как следует из теоремы 1.2, билинейная форма однозначно определяется своим заданием на базисных векторах, при этом матрица билинейной формы представляет собой таблицу её значений на парах базисных векторов и однозначно определяет значения этой формы для любой пары векторов.

Примеры:

• Скалярное произведение (x, y) в евклидовом пространстве является симметрической билинейной формой.

• В линейном пространстве R, если $f(x), g(x)$ — линейные функционалы, то $A(x, y) = f(x)g(y)$ является симметрической билинейной формой.

• Пусть a — постоянный вектор, а x и y — переменный вектор. Смешанное произведение (a, x, y) является билинейной формой.

2. Квадратичные формы.

Определение 2.1. *Пусть $A(x,y)$ — билинейная форма на R. Квадратичной формой называется отображение $A\colon R \to \mathbb{R}$, которое каждому вектору $x \in R$ ставит в соответствие число $A(x,x)$.*

Замечание 2.1. *Различные билинейные формы могут порождать одну и ту же квадратичную форму. Например, билинейные формы*

$$\begin{gathered}
A_1(x,y) = \xi_1\eta_1 + 2\xi_1\eta_2 + 2\xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_2,\\
A_2(x,y) = \xi_1\eta_1 + 3\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_2,\\
A_3(x,y) = \xi_1\eta_1 + 8\xi_1\eta_2 - 4\xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_2,
\end{gathered}$$

порождают квадратичную форму $A(x,x) = \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$ (билинейная форма $A_1(x,y)$ - симметрическая).

Таким образом, по квадратичной форме, вообще говоря, нельзя однозначно восстановить породившую ее билинейную форму. Однако, среди всех билинейных форм, порождающих данную квадратичную форму $A(x,x)$, симметрическая билинейная форма единственна. Действительно, пусть $\tilde{A}(x,y) = \tilde{A}(y,x)$ и $A(x,x) = \tilde{A}(x,x)$ для любых $x, y \in R$. Тогда

$$\tilde{A}(x+y,x+y) = \tilde{A}(x,x) + 2\tilde{A}(x,y) + \tilde{A}(y,y),$$

откуда

$$\tilde{A}(x,y) = \frac{1}{2}[\tilde{A}(x+y,x+y) - \tilde{A}(x,x) - \tilde{A}(y,y)] = \\ = \frac{1}{2}[A(x+y,x+y) - A(x,x) - A(y,y)].$$

Определение 2.2. *Матрицей квадратичной формы $A(x,x)$ в базисе e называется матрица симметрической билинейной формы, порождающей данную квадратичную форму, в базисе e.*

Из свойств билинейной формы вытекают следующие свойства квадратичных форм:

ŋqdqɐǝʎ bɆ dǝdɆbʎɜǝ d ɐɔɑbɔɐ Ɉqddʎqɐè

1) Матрица квадратичной формы симметрична.

2) Матрица квадратичной формы в базисах e и e' связаны соотношением

$$A'_e = T^T_{ee'} A_e T_{ee'},$$

где $T_{ee'}$ —матрица перехода от базиса e к базису e'.

3) В базисе e квадратичная форма $A(x,x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ может быть записана в следующем виде: для любого $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2.1}$$

или, в компактной форме,

$$A(x,x) = x_e^T A_e x_e. \tag{2.2}$$

Представление квадратичной формы в виде (2.1) или (2.2) называется *общим видом квадратичной формы* $A(x,x)$ в базисе e.

4) Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы в произвольном базисе. Очевидно, ранг $A(x,x)$ равен рангу $A(x,y)$. Квадратичная форма $A(x,x)$ называется вырожденной, если ранг $A(x,x)$ меньше $\dim R$, и, невырожденной, если ранг $A(x,x)$ равен $\dim R$.

ŋqdqɏeɎ bɆ dəqɆbɎɜə d ɕɑɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè