

В.К. Андреев,
Н.Л. Собачкина

ДВИЖЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Монография

Институт математики



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет
Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт вычислительного моделирования

В. К. Андреев, Н. Л. Собачкина

ДВИЖЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Монография

Красноярск
СФУ
2012

УДК 536.2:532/533

ББК 22.365.5

А65

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук, профессор *В. М. Белолитецкий*

доктор физико-математических наук, профессор *С. В. Хабиров*

Андреев, В. К.

А 65 Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях: монография / В. К. Андреев, Н. Л. Собачкина. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. 188 с.

ISBN 978-5-7638-2372-1

В монографии представлены результаты исследований конкретных нестационарных движений бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии, возникающих в достаточно длинных плоских и цилиндрических слоях. Рассмотрены свойства инвариантных решений уравнений термодиффузии, когда на границе раздела двух смесей поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации. Для возникающих сопряженных начально-краевых задач получены априорные оценки всех полей, показывающие их экспоненциальную сходимость с ростом времени к стационарным значениям. Приведены результаты численных расчетов поведения скоростей, температур и концентраций в слоях. Дано обобщение решений Остроумова – Бириха на движение смесей в цилиндрической трубе.

Результаты монографии будут полезны научным работникам, преподавателям, студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам вузов, занимающимся конвективными течениями.

УДК 536.2:532/533

ББК 22.365.5

ISBN 978-5-7638-2372-1

© В. К. Андреев,
Н. Л. Собачкина, 2012

© Сибирский
федеральный
университет, 2012

Оглавление

Введение	5
Глава 1	
Однонаправленные двухслойные движения смесей в плоских и цилиндрических слоях	12
1.1. Постановка задачи о движении двух бинарных смесей с поверхностью раздела	12
1.2. Совместное однонаправленное движение бинарных смесей в плоских слоях при заданном перепаде давления	20
1.3. Движение смесей под действием термоконцентрационных сил	47
1.4. Совместное однонаправленное движение вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в трубе под действием перепада давления	68
1.5. Термоконцентрационное движение вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в трубе .	103
Глава 2	
Влияние эффекта Соре на движение смесей со свободной границей	117
2.1. Движение плоского слоя жидкости с двумя свободными границами под действием эффекта Соре	117
2.2. Движение плоского слоя жидкости со свободной границей и твердой стенкой	134
2.3. Движение бинарной смеси с цилиндрической свободной границей	140
Глава 3	
Движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе	158
3.1. Основные уравнения и граничные условия	158
3.2. Стационарные ползущие движения	162

3.3. Нестационарные ползущие движения	164
3.4. Решение стационарной задачи в первом прибли- жении	172
Библиографический список	180

Введение

Среди множества моделей, используемых в механике жидких сред, можно выделить так называемые *классические модели*, к которым относятся уравнения газовой динамики, Эйлера идеальной жидкости, Навье – Стокса вязкой жидкости, Обербека – Буссинеска конвективных течений. В последнее время в связи с появлением новых задач, развитием математического аппарата и средств вычислительной техники возрос интерес к *неклассическим моделям гидродинамики*. В качестве примера можно привести модели вязкого теплопроводного газа [1], микроконвекции [2], а также конвекции с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности [3, 4]. Такие усложненные модели с большей точностью (по сравнению с классическими) описывают реальные физические процессы и активно используются в вычислительной гидродинамике. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей усложненных сред. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве “тестовых задач” для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов.

Изучению моделей микроконвекции и вязкого теплопроводного газа с помощью теоретико-групповых методов посвящена монография [5]. Отметим также монографию [6], в которой наряду с классическими моделями исследуются уравнения термокапиллярного движения, пограничного слоя Марангони, а также уравнения конвекции с коэффициентами переноса, зависящими от температуры.

В данной книге рассматриваются конкретные подмодели движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Эти подмодели возникают при движении смесей в достаточно длинных плоских или цилиндрических слоях. По классификации группового анализа они являются инвариантными или частично инвариантными решениями общих уравнений термодиффузии. Соответствующие системы уравнений хотя и содержат меньшее число зависимых и независимых переменных, однако начально-краевые задачи для них являются очень трудными для исследования.

Термодиффузией называют молекулярный перенос вещества, связанный с наличием в среде (жидком растворе или газовой смеси) градиента температуры. При термодиффузии концентрация компонентов в областях повышенной и пониженной температуры различна. Наличие градиента концентрации приводит к возникновению обыкновенной диффузии. Стационарное состояние устанавливается тогда, когда процессы диффузии и термодиффузии уравниваются друг друга (т. е. процесс перемешивания компонентов смеси компенсируется процессом их разделения). На практике часто встречается нормальная термодиффузия, при которой тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие компоненты — в более нагретые области. В отдельных случаях наблюдается аномальная термодиффузия, когда направление движения компонентов меняется на противоположное. Термодиффузию в растворах также называют *эффектом Соре*.

Термодиффузия часто встречается в природе, а также имеет множество приложений в технике. В сочетании с тепловой конвекцией этот эффект используется для разделения изотопов в жидких и газовых смесях [7, 8]. Термодиффузия используется для определения состава нефти и разделения ее компонентов [9], нанесения различных покрытий на изделия из металлов

и играет важную роль в процессе выращивания кристаллов. Еще один пример практического применения рассматриваемого эффекта дает тепловой насос [10]. Термодиффузия также влияет на течения в морях и океанах, где массы соленой воды подвергаются различным режимам нагрева [11, 12]. Роль эффекта Соре важна и при переносе вещества через клеточные мембраны [13].

Основу модели термодиффузии бинарной смеси составляет система уравнений Навье–Стокса, дополненная уравнениями тепло- и массопереноса (вывод уравнений см., например, в работах [14, 15]). Часто используется приближение Обербека–Буссинеска, предназначенное для описания конвективных течений в естественных земных условиях. Предполагается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации легкого компонента:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C). \quad (0.1)$$

Здесь ρ_0 — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, а через T и C обозначены малые отклонения от средних значений; β_1 — коэффициент теплового расширения смеси; β_2 — концентрационный коэффициент плотности ($\beta_2 > 0$, поскольку C — концентрация легкого компонента).

Движение смеси описывается системой уравнений [3, 4]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}(\beta_1 T + \beta_2 C), \\ T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \chi \nabla^2 T, \\ C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= D \nabla^2 C + \alpha D \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости; p — отклонение давления от гидростатического; ν — коэффициент кинематической вязкости; \mathbf{g} —

вектор ускорения свободного падения; χ — коэффициент температуропроводности; D — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии. Все характеристики среды предполагаются постоянными и соответствуют средним значениям температуры и концентрации. Параметр термодиффузии имеет вид $\alpha = -D_T/T_0 D$, где D_T — коэффициент термодиффузии; T_0 — средняя температура. Нормальной термодиффузии соответствуют значения $\alpha < 0$, а для аномальной термодиффузии $\alpha > 0$.

При выводе системы (0.2) предполагается [16], что диффузионный поток компонента смеси равен

$$\mathbf{i} = -\rho_0(D\nabla C + D_T\nabla T).$$

В чистой жидкости эффекта Соре нет, поэтому коэффициент D_T должен обращаться в ноль при $C = 0$ и $C = 1$. Поскольку для малых отклонений температур и концентраций от равновесных значений T_0 и C_0 все коэффициенты переноса можно считать постоянными, то часто используется соотношение $D_T = C_0(1 - C_0)D'_T$, причем D'_T также называется коэффициентом термодиффузии [16].

В частном случае ($C = 0$, $\alpha = 0$) система (0.2) переходит в систему уравнений свободной конвекции однородной жидкости (модель Обербека – Буссинеска). Для данной модели известно достаточно много точных решений, значительная часть которых приведена в монографиях [3, 17]; они являются стационарными, т. е. не зависят от времени. Эти работы посвящены исследованию устойчивости различных типов конвективных течений, а также механического равновесия. Групповые свойства уравнений свободной конвекции в плоском случае изучались в статье [18], а для стационарных плоских течений — в более ранней работе [19] (см. также монографию [5]). В указанных работах построен ряд точных решений, часть из которых была найдена ранее другими методами.