Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра микроэлектроники

# Задачи по электростатике

Методические указания

*Рекомендовано*
*Научно-методическим советом университета*
*для студентов, обучающихся по специальностям*
*Микроэлектроника и полупроводниковые приборы,*
*Радиофизика и электроника*

Ярославль 2009

УДК 537.86
ББК В 331я 73-4

З 15

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года.

**Рецензент**
кафедра микроэлектроники Ярославского государственного
университета им. П.Г. Демидова

З 15 Задачи по электростатике: метод. указания/сост. И.А. Кузнецова; Яросл. гос. ун-т. - Ярославль: ЯрГУ, 2009. - 28 с.

Задачи классифицированы по трем разделам, соответствующим программе теоретического курса, в каждом разделе приведены примеры решения типовых задач.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальностям 010803 Микроэлектроника и полупроводниковые приборы и 010801 Радиофизика и электроника (дисциплина "Электричество и магнетизм", блок ЕН), очной формы обучения .

УДК 537.86
ББК В 331я 73-4

# 1. Постоянное электрическое поле в вакууме

• Напряженность и потенциал поля точечного заряда $q$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

• Напряженность и потенциал поля заданного распределения точечных зарядов:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}, \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|},$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}_i$ - векторы точки наблюдения (точки, в которой определяются $\vec{E}$ и $\varphi$) и точки расположения заряда $q_i$ соответственно.

• Напряженность и потенциал заданного непрерывного распределения линейных $(\gamma)$, поверхностных $(\sigma)$ или объемных $(\rho)$ зарядов:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dq', \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},$$

где $dq'$ может быть равно $\rho(\vec{r}\,')dV'$, $\sigma(\vec{r}\,')dS'$, $\gamma(\vec{r}\,')dl'$.

• Связь между напряженностью поля и потенциалом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

• Теорема Гаусса и теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = q/\varepsilon_0, \quad \oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = 0.$$

**Пример 1.** Вычислить напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной нитью конечной длины в точке С, находящейся на расстоянии $R$ от нити. Углы, образованные нитью и прямыми, проходящими через концы нити и точку С, соответственно равны $\alpha_1$ и $\pi - \alpha_2$. Линейная плотность заряда нити равна $\gamma$.

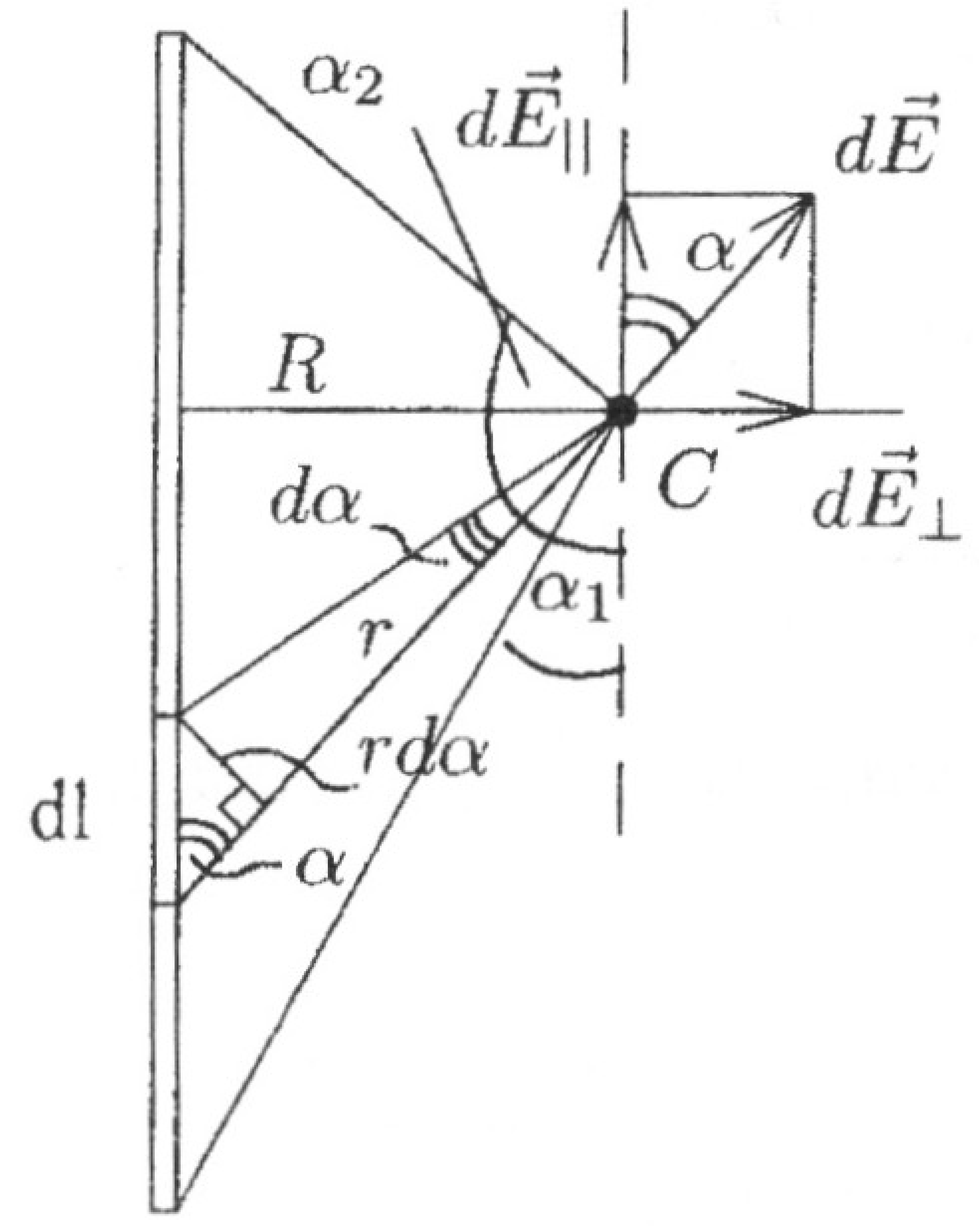


Рис. 1.1

**Решение.** Из рис. 1.1 видно, что поле

$$dE = \frac{\gamma dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

создается элементом $dl$ нити, где

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}, \quad dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R d\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$dE = \frac{\gamma R\,d\alpha\,\sin^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2 \sin^2\alpha} = \frac{\gamma\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$dE_\perp = dE\,\sin\alpha = \frac{\gamma\sin\alpha\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R}; \quad dE_{\|} = dE\,\cos\alpha = \frac{\gamma\cos\alpha\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$E_\perp = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_\perp = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos\alpha\right)_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2);$$

$$E_{\|} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_{\|} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin\alpha\right)_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1);$$

$$E = \sqrt{E_\perp^2 + E_{\|}^2} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2} =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

**Пример 2.** Тонкое непроводящее кольцо радиусом $R$ заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cdot \cos\varphi$, где $\lambda_0 > 0$, а $\varphi$ - азимутальный угол. Найти напряженность электрического поля на оси кольца в зависимости от расстояния $x$ до его центра (см. рис. 1.2).

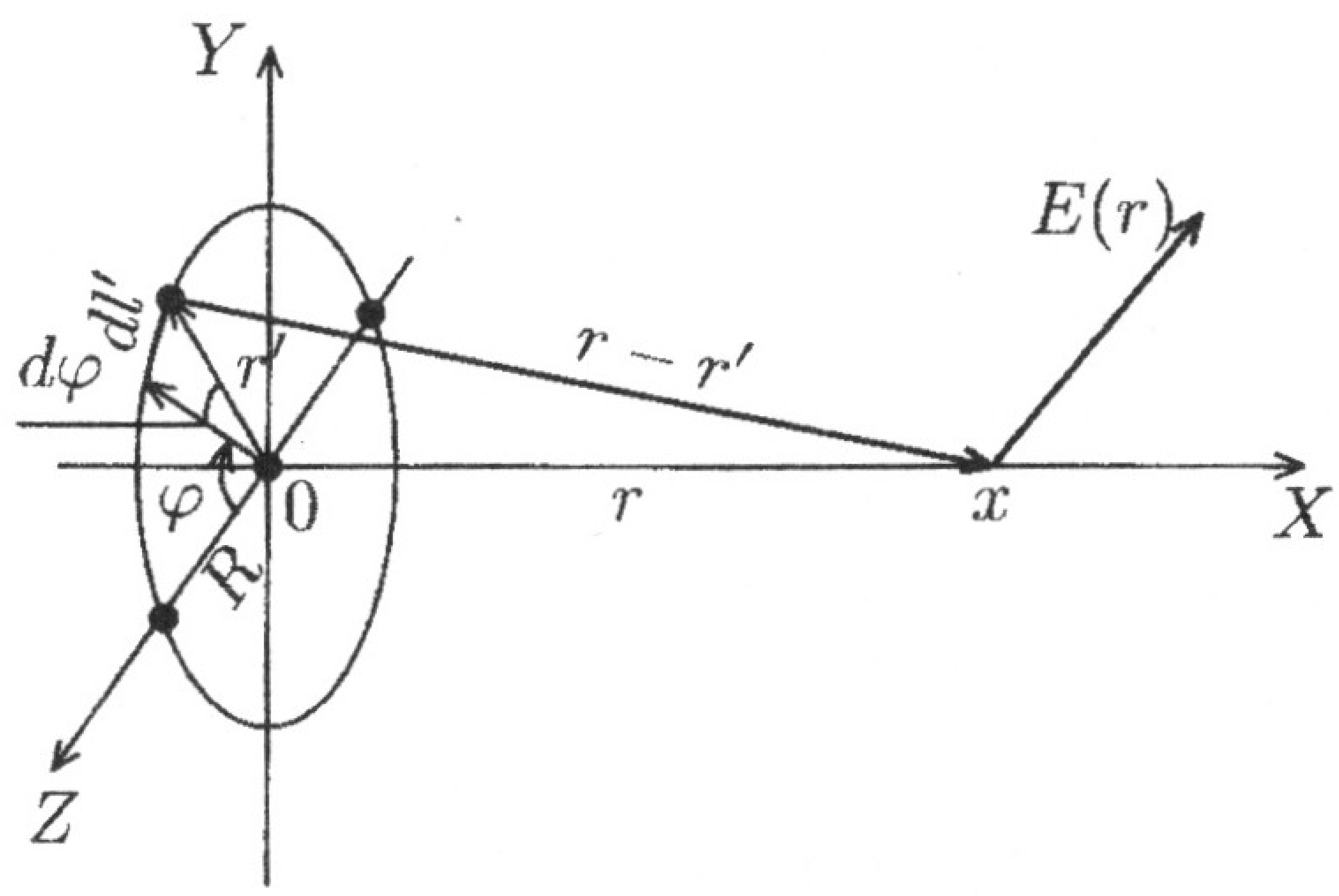


Рис. 1.2

**Решение**. Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = k \int \frac{\lambda(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dl',$$

где $k = 2/(4\pi\varepsilon_0)$; $\vec{r} = (x, 0, 0)$; $\vec{r}\,' = (0, R\sin\varphi, R\cos\varphi)$; $dl' = Rd\varphi$, $|\vec{r} - \vec{r}\,'| = (x^2 + R^2)^{1/2}$. Проекции вектора $\vec{E}(\vec{r})$ на оси координат:

$$E_x(\vec{r}) = k \int\limits_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 x \cos\varphi}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\, Rd\varphi = \frac{k\lambda_0 x R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0;$$

$$E_y(\vec{r}) = -k\lambda_0 \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\sin\varphi\cos\varphi}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\, Rd\varphi = -\frac{k\lambda_0 R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \int\limits_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0;$$

$$E_z(\vec{r}) = -k\lambda_0 \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = -\frac{k\lambda_0\, R^2 \pi}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Так как $E_x = E_y = 0$, то величина напряженности поля в точке $(x, 0, 0)$

$$\vec{E}(x, 0, 0) = E_z \vec{k} = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{k},$$