

УДК 514.74(075)

ББК 22.15я73

П16

Рецензенты:

*А. К. Гуц*, д-р физ.-мат. наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «ОмГУ им. Ф. М. Достоевского»;

*Д. Н. Коротаев*, д-р техн. наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «СибАДИ»

**Панчук, К. Л.**

П16 Математические основы геометрического моделирования кривых линий : учеб. пособие / К. Л. Панчук, В. Ю. Юрков, Н. В. Кайгородцева ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2020. – 200 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-2993-8

Содержит теоретический материал, задачи и упражнения по теме «Кривые линии». Материал изложен в логической последовательности, формирующей у обучающихся знания и умения, начиная от простейших геометрических понятий до оперирования математическим аппаратом геометрического моделирования кривых линий.

Предназначено для обучающихся в аспирантуре по специальности 05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная графика». Может быть полезным для аспирантов смежных и родственных специальностей.

УДК 514.74(075)

ББК 22.15я73

*Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Омского государственного технического университета*

ISBN 978-5-8149-2993-8

© ОмГТУ, 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	10
2. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА.....	24
2.1. Понятие метрического пространства.....	24
2.2. Понятие топологического пространства .....	26
2.3. Непрерывные и гомеоморфные отображения топологического пространства.....	31
2.4. Понятие отделимых, компактных и связных топологических пространств .....	37
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала .....	39
3. ПОНЯТИЕ ЛИНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. ГЛАДКОСТЬ И СОПРИКОСНОВЕНИЕ ЛИНИЙ.....	41
3.1. Элементарные линии.....	41
3.2. Общее понятие линии .....	42
3.3. Гладкие линии класса $C^k$ , $k \in N$ .....	44
3.4. Допустимые параметризации гладкой линии класса $C^k$ , $k \in N$ .....	46
3.5. Геометрическая гладкость линии ( $G$ -гладкость).....	50
3.6. Касание линий.....	54
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала .....	58
4. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИВОЙ ЛИНИИ .....	60
4.1. Понятие касательной и ее уравнения .....	60
4.2. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль кривой .....	64
4.3. Длина дуги кривой. Естественная параметризация .....	68
4.4. О параметризации кривых векторного представления.....	69
4.5. Кривизна и кручение кривой.....	72
4.6. Формулы Френе и натуральные уравнения кривой .....	76
4.7. Определение кривизны и кручения пространственной кривой по её модели на чертеже Монжа.....	78
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала .....	89

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ .....	92
5.1. Инверсия .....	93
5.2. Обобщенная инверсия .....	97
5.3. Центральные преобразования общего вида .....	98
5.4. Кривые проективных соответствий .....	100
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала.....	102
6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ.....	104
6.1. Задача интерполяции .....	106
6.1.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа .....	109
6.1.2. Интерполяционные формулы Ньютона .....	109
6.1.3. Интерполяция сплайнами.....	110
6.1.4. Моделирование составной кривой .....	111
6.2. Задача аппроксимации (сглаживания) .....	111
6.2.1. Моделирование кривых методом наименьших квадратов.....	112
6.2.2. Линеаризация в методе наименьших квадратов .....	114
6.2.3. Исключение точек перегиба.....	114
6.2.4. Метод наименьших квадратов для кривых, заданных неявными функциями.....	115
6.2.5. Оптимизация степени многочленов в методе наименьших квадратов.....	116
6.3. Аппроксимация сглаживающими сплайнами .....	118
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала.....	118
7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ (СПЛАЙНЫ БЕЗЬЕ) .....	120
7.1. Общая задача геометрического моделирования составной кривой линии .....	120
7.2. Квадратичная кривая Безье и полиномиальный сплайн на ее основе .....	122
7.3. Кубическая кривая Безье и полиномиальный сплайн на ее основе .....	129
7.4. Дробно-рациональная квадратичная кривая Безье и сплайн на ее основе.....	134
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала.....	141

ГЛАВА 8. МНОЖЕСТВА ЛИНИЙ.....	143
8.1. Множества прямых трехмерного пространства .....	148
8.2. Множества кривых. Огибающая.....	151
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала .....	154
ГЛАВА 9. ЛИНИИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.....	156
9.1. Понятие многомерного евклидова пространства .....	156
9.2. Моделирование многомерного пространства.....	158
9.3. Моделирование кривых в евклидовом многомерном пространстве .....	162
Вопросы и упражнения для закрепления теоретического материала .....	165
ГЛАВА 10. Примеры геометрического моделирования кривых линий в решении задач теории и практики.....	166
10.1. Циклографическая проекция кривой.....	166
10.2. Применение кривых в задачах геометрической оптики на плоскости .....	171
10.3. Аналитическое и конструктивное решение задачи Аполлония .....	179
10.4. Кинематическая геометрия кривой линии и ее приложение в теории плоского зубчатого зацепления .....	183
10.4.1. Кинематическая геометрия пространственной кривой линии.....	183
10.4.2. Геометрическая модель плоского зубчатого зацепления .....	187
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	194
Библиографический список .....	195