МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Учебно-методическое пособие

Составители:
А.Т. Астахов,
Ю.В. Засорин,
В.З. Мешков

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

ŋqdqȺeɎ bɆ dəqɆbɎзə q ɛɔɑbɔȺ Ɉqddɏqɐè

Содержание

ŋqdqɏeɎ bɆ dedɆbɎɜə d ɛɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Для удобства введем обозначение $G(x,\xi) \overset{\text{def}}{=} E(x-\xi)+h(\xi)$. Тогда

$$u(x)=\int\limits_{\Omega} G(x,\xi)\Delta u(\xi)\,d\xi+\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_{\xi}}u(\xi)-G(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_{\xi}}\right)dS_{\xi}. \quad (3)$$

Такое представление справедливо для всякой гармонической в замыкании Ω функции $h(\xi)$.

Функцию $G(x,\xi)$ обычно называют *функцией Грина* соответствующих краевых задач.

Замечание. Когда мы говорили о фундаментальном решении, мы говорили о нем как о специальном обобщенном решении некоторого конкретного уравнения с постоянными коэффициентами, рассматриваемого к тому же во всем пространстве.

Если же мы говорим о функции Грина, то можем говорить о ней лишь как о функции, связанной не только с самим уравнением, но и с областью, в которой рассматривается это уравнение, и с типом краевых условий.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим в Ω задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma} = \varphi(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

Определение. *Функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона* называется регулярная обобщенная функция $G(x,\xi)$, зависящая от $x \in \Omega$ и $\xi \in \overline{\Omega}$, $\xi \neq x$ (т. е. $2n$ переменных) и принадлежащая при каждом $x \in \Omega$ классу $C^2_{\xi}(\Omega \setminus \{x\}) \cap C_{\xi}(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ по переменной ξ, такая, что

1) $G(x,\xi) = G(\xi,x), \quad x,\xi \in \Omega$ (симметричность);
2) $\Delta_x G(x,\xi) = \Delta_{\xi} G(x,\xi) = \delta(x-\xi), \quad x,\xi \in \Omega;$
3) $G(x,\xi)\big|_{\xi\in\Gamma} = 0 \ \ \forall x \in \Omega.$

Свойство 2) должно выполняться лишь в области Ω, мы не можем гарантировать, что это свойство справедливо и вне Ω. Другими словами, $\operatorname{supp}\varphi \Subset \Omega$.

Используя теперь наше определение и равенство (3), немедленно получаем, что решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле, если оно существует, может быть задано формулой

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \varphi(\xi)\, dS_\xi. \qquad (5)$$

Но теперь возникает вопрос: как построить функцию Грина

$$G(x,\xi) \overset{\text{def}}{=} E(x-\xi) + h(x,\xi),$$

где функция $h(x,\xi)$ гармонична в Ω по обоим наборам переменных x и ξ и симметрична по ним. Следовательно, вопрос сводится к построению самой функции $h(x,\xi)$. Из определения функции Грина, следует, что нужно решить частную задачу

$$\begin{cases} \Delta_\xi h(x,\xi) = 0, & x,\xi \in \Omega; \\ h\big|_{\xi\in\Gamma} = -E(x-\xi), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Известно, что для достаточно широкого класса поверхностей, называемых *поверхностями Ляпунова*, задача Дирихле для оператора Лапласа для функции $h(x,\xi)$ разрешима, то есть функция Грина существует.

В дальнейшем мы рассмотрим методы построения функции Грина. Заметим, что второе условие в определении функции Грина показывает, что она является фундаментальным решением оператора Лапласа (зависит от рассматриваемой области). Третье условие отражает тип граничных условий, для которых строится функция Грина.

Целесообразность построения функции Грина разъясняется следующим утверждением.

Теорема. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей* Γ, $G(x,\xi)$ *– функция Грина на* Ω, $\varphi(x) \in C(\Gamma)$ *и* $f(x) \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ *– заданные функции. Если решение* $u(x)$ *внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона (4) существует в классе* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *причем* $u(x)$ *имеет на границе* Γ *области* Ω *правильную нормальную производную* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}_\xi}$, *то справедлива формула (5).*

3. СИММЕТРИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ ГРИНА

Заметим, что требование симметричности функции Грина является лишним. Действительно, справедлива теорема.

Теорема(симметричность функции Грина). *Пусть* $x \in \Omega$ *и* $\xi \in \Omega$. *Тогда* $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

Доказательство. Применим вторую формулу Грина к функциям $u(y) = G(y,\xi)$ и $v(y) = G(y,x)$ в области

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash (V_\varepsilon(x) \cup V_\varepsilon(\xi)),$$

где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что для шара $V_\varepsilon(x)$ с центром в точке x радиуса ε выполняется условие $V_\varepsilon(x) \Subset \Omega$ и, аналогично, $V_\varepsilon(\xi) \Subset \Omega$. Напомним: $S_\varepsilon(x) = \partial V_\varepsilon(x)$.

Учитывая, что $\Delta u = 0$ в Ω_ε, $\Delta v = 0$ в Ω_ε, $u(y) = v(y) = 0$ на $\partial\Omega$, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS.$$

Граница Γ области Ω_ε состоит из $\partial\Omega \cup (S_\varepsilon(x) \cup S_\varepsilon(\xi)$. Тогда

$$\int\limits_{S_\varepsilon(x) \cup S_\varepsilon(\xi)} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS = 0, \tag{6}$$

где $\vec{n}$ – направление внешней нормали в точках $S_\varepsilon(x)$ и $S_\varepsilon(\xi)$.