Федеральное агентство по образованию

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

С.В. КИСЕЛЕВСКАЯ
А.А. УШАКОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2010

ББК
К 44

Рецензенты: Г.В. Алексеев, д-р физ.-мат наук, профессор, проф. каф. МФиКТ ДВГУ;
Р.В. Бризицкий, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник ИМП ДВО РАН

Киселевская, С.В., Ушаков, А.А.
К 44 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ [Текст] : учебное пособие. – Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2009. – 96 с.

Содержит основные сведения о численных методах, необходимые для первопервоначального знакомства с предметом. В учебном пособии излагаются основы численных методов для решения нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, дифференциальных и интеинтегральных уравнений, а также методы поиска экстремума функции двух переменных. По каждой теме приводится необходимая теоретическая часть, методические рекомендации и решение типовых задач в математическом пакете MathCad, а также варианты заданий для лабораторных работ.

Предназначено для студентов следующих специальностей: 080116.65 «Математические методы в экономике», 080801.65 «Прикладная информатика в экономике», 230101.65 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети», 230201.65 «Информационные системы и технологии».

ББК

ŋqdbyэӋ bƎ dəpƎbӳзə d ɕɔɑɓɔӌ ɟqdbӳqӌè

Часть I. УЧЕБНО-ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ

ВВЕДЕНИЕ

Часто возникает необходимость, как в самой математике, так и ее приложениях в разнообразных областях получать решения математических задач в числовой форме. (Для представления решения в графическом виде также требуется предварительно вычислять его значения.) При этом для многих задач известно только о существовании решения, но не существует конечной формулы, представляющей ее решение. Даже при наличии такой формулы ее использование для получения отдельных значений решения может оказаться неэффективным.

Во всех этих случаях используются методы приближенного, в первую очередь численного решения. Методы численного решения математических задач всегда составляли неотъемлемую часть математики.

Во многих случаях вычислительный алгоритм решения сложной задачи строится из набора базовых компонент, представляющих собой алгоритмы решения некоторых стандартных математических задач. Изучение численных методов решения этих задач – необходимый элемент овладения современной технологией математического моделирования.

При этом идея модели лежит в основе того, что можно назвать методом вычислительной математики. Как правило, алгоритмы приближенного решения базируются на том, что исходная математическая задача заменяется (аппроксимируется) некоторой более простой или чаще последовательностью более простых задач. Решение этих более простых задач трактуется как приближенное решение задачи исходной. Т.е. фактически используется некоторая модель исходной задачи.

Метод приближенного решения поставленной задачи представляет собой ***итерационный процесс***, т.е. процесс последовательного выполнения заданных действий, разделенных получением промежуточных результатов. Для итерационных методов характерно получение приближенного значения, с последующим его уточнением.

Технологическая цепочка вычислительного эксперимента включает в себя следующие этапы:

– построение математической модели исследуемого объекта (сюда же относится и анализ модели, выяснение корректности поставленной математической задачи;

– построение вычислительного алгоритма – метода приближенного решения поставленной задачи и его обоснование;

– программирование алгоритма на ЭВМ и его тестирование;

– проведение серии расчетов с варьированием определяющих параметров исходной задачи и алгоритма;

– анализ полученных результатов;

Каждый из этих этапов допускает возврат к любому из предыдущих с целью его уточнения и корректировки.

Тема 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Отделение корней уравнения

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$.

Определение. Всякое число ξ, обращающее функцию в нуль, то есть такое, что $f(\xi)\equiv 0$, называется нулем функции или корнем уравнения

$$f(x)=0. \tag{1.1}$$

Приближенное вычисление корня, как правило, распадается на две задачи:

1. Отделение корней, то есть определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения.
2. Уточнение корня, то есть вычисление его с заданной степенью точности.

При отделении корней уравнения общего вида (1.1) часто используется известная из курса математического анализа теорема Больцано-Коши:

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует такая точка ξ, принадлежащая интервалу $(a;b)$, в которой функция обращается в ноль.

Заметим, что корень будет единственным, если $f'(x)$ (или $f''(x)$) существует и сохраняет знак на рассматриваемом отрезке.

На практике начальное приближение может быть найдено различными способами: из физических соображений, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, с помощью графических методов.

Рассмотрим пример отделения корней нелинейного уравнения $y=x-\sin x-0,25$ графическим методом в математическом пакете MathCad.

Шаг 1. Ввести функцию $f(x)$.

Шаг 2. Вызвать мастер функций X-Y (декартовый график).

Шаг 3. Ввести в местозаполнители имена переменных и функции, которые должны быть изображены на графике.

Созданный график (рис. 1) можно изменить, в том числе меняя сами данные, форматируя его внешний вид или добавляя дополнительные элементы оформления.

ŋqdþyəɣ þɆ dəþɆþɣзə d ɐɔɑbɔɣ Ɉqdþɣqɣè

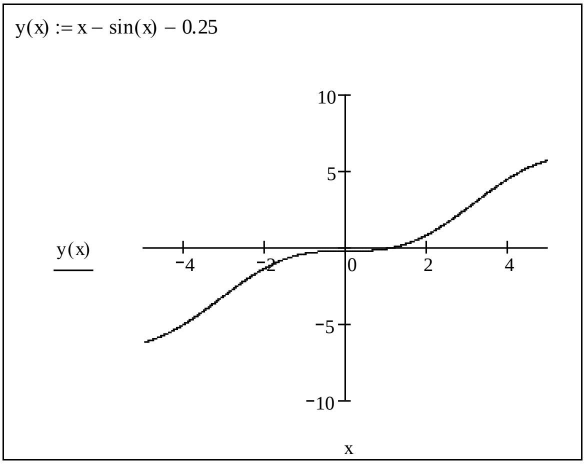

Рис. 1.

1.2. Метод бисекций (деления отрезка пополам)

Рассмотрим теперь задачу уточнения корня, то есть задачу вычисления корня ξ с заданной степенью точности ε. В дальнейшем во всех методах будем предполагать, что корень ξ, уравнения (1.1) отделен на отрезке $[a;b]$ и функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной.

Пусть мы нашли отрезок $[a;b]$, на котором функция меняет знак, т.е. на котором находится значение корня.

В качестве начального приближения корня принимаем середину этого отрезка: $x_0 = (a+b)/2$.

Далее исследуем значения функции $f(x)$ на концах отрезков $[a;x_0]$ и $[x_0;b]$. Тот из отрезков, на концах которого функция принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1;b_1]$. Вторую половину отрезка $[a;b]$ на которой знак $f(x)$ не меняется, отбрасываем. В качестве первого приближения корня принимаем $x_1 = (a_1+b_1)/2$ и так далее (рис. 2). Таким образом, *k*-е приближение вычисляется по формуле

$$x_k = (a_k + b_k)/2.$$