МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Составитель
П. В. Садчиков

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Введение

Одна из глубочайших мыслей И. Ньютона, которую он счёл нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa». В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения». В настоящее время теория дифференциальных уравнений представляет собой трудно обозримый конгломерат большого количества разнообразных идей и методов, в высшей степени полезный для всевозможных приложений и постоянно стимулирующий теоретические исследования во всех отделах математики.

В настоящем пособии излагаются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и методы интегрирования отдельных типов уравнений первого и второго порядков. Изложение сопровождается многочисленными обстоятельно разобранными примерами. В приложении содержатся варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɖɏqɏè

Определение 6. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (2), если после замены y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x)$, оно обращается в тождество.

Определение 7. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Определение 8. Условия

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \tag{4}$$

в силу которых функция $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0, называют *начальными условиями* решения. Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y\big|_{x=x_0} = y_0 .$$

Определение 9. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка (2) называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) функция $y = \varphi(x, C)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении C;

2) каково бы ни было условие (4), можно найти такое значение постоянной C ($C = C_0$), при котором функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение 10. *Частным решением* дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Определение 11. Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (2), удовлетворяющего заданному начальному условию (4), называется *задачей Коши*.

Теорема 1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (3) функция $f(x, y)$ и ее частная производная

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɖɏqɏè

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

$f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (4).

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, зависящее от одной произвольной постоянной C, а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ – одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $(x_0; y_0)$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Нетрудно проверить, что общим решением данного уравнения является функция $y = C / x$, где C – произвольная постоянная. При различных значениях C получаем различные решения.

Найдем частное решение, удовлетворяющее, например, начальным условиям $x_0 = 1, y_0 = 1$. Имеем $1 = C \cdot 1$. Отсюда $C = 1$ и искомое частное решение $y = 1/x$.

Геометрически общее решение данного уравнения представляет собой семейство гипербол $y = C / x$, каждая из которых изображает частное решение данного уравнения (рис. 1).

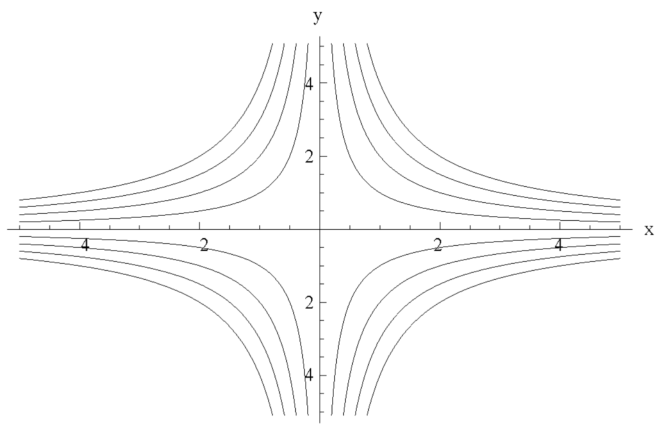

Рис. 1

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определение 12. Уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{5}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Разделим уравнение (5) на $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$. Получим $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx +$ $+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$. Проинтегрировав полученное уравнение почленно, получим его *общий интеграл:*

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

Замечание 1. При почленном делении дифференциального уравнения на $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $P_2(x)Q_1(y) = 0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения, – *особые решения.*

Замечание 2. Уравнение $y' = f_1(x) f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

Пример 4. Решить уравнение $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения $y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$. Оно имеет вид (4). Делим обе части уравнения на $xy \neq 0$: $\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$.

Найдем общий интеграл:

$$x + \ln|x| + \ln|y| - y = c, \text{ т.е. } \ln|xy| + x - y = c.$$

ђqdqуеҮ bЄ dәpЄbҮзә d әɑсдә ʒqdqҮqҿ

ŋqdqɏeɎ bɆ dəqɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqdqɏqɏè

Здесь уравнение $P_2(x)Q_1(y)=0$ имеет вид $xy=0$. Его решение $x=0$ и $y=0$ являются решениями дифференциального уравнения, но не входят в общий интеграл. Значит, $x=0$ и $y=0$ – особые решения.

ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 13. Функция $g(x,y)$ называется *однородной порядка* m, если $g(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m g(x,y)$.

Определение 14. Уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (6)$$

называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного порядка.

Однородное уравнение (6) может быть приведено к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

С помощью подстановки $\frac{y}{x}=u$ или $y=xu$ однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$.

Это уравнение однородное, так как функции $P(x,y)=x^2-y^2$ и $Q(x,y)=2xy$ – однородные функции второго порядка. Положим $y=ux$, тогда $dy=udx+xdu$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2-u^2x^2)dx+2x\cdot ux\cdot xdu+2x\cdot ux\cdot udx=0,$$

$$x^2(1-u^2+2u^2)dx+2ux^3du=0,$$

$(1+u^2)dx+2uxdu=0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные $\frac{dx}{x}+\frac{2u}{1+u^2}du=0$ и интегрируем:

ŋqdqɏeɎ bɆ dəqɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqdqɏqɏè

ҧqdфyеҮ bĘ dеdĘbҮзе d єаαрсҰ ЭqdфҮqҰè

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1 \;\to\; x(1+u^2) = c\,.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим общий интеграл $x^2 + y^2 = cx$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 15. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции.

Определение 16. Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (7) называется *линейным однородным* уравнением. Если $q(x) \neq 0$, то уравнение (7) называется *линейным неоднородным уравнением.*

Рассмотрим два метода решения линейного уравнения (7) – *метод подстановки* (метод Бернулли) и *метод вариации произвольной постоянной* (метод Лагранжа).

Метод Бернулли

Решение уравнения (7) ищется в виде произведения двух других функций, т.е. с помощью подстановки $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции от x, причем одна из них произвольная, но не равная нулю. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (7), получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x)$ или $u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = q(x)$. Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение $v' + p(x) \cdot v = 0$. Итак, $\dfrac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$,

ҧqdфyеҮ bĘ dеdĘbҮзе d єаαрсҰ ЭqdфҮqҰè