

УДК 51
ББК 22.1
Ф91

Рецензенты: кафедра высшей математики ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский политехнический университет» (заслуженный работник высшей школы РФ, канд. техн. наук, профессор Ю. А. Хватов);
кафедра криогенной техники СПбГУНиПТ (зав. кафедрой, д-р техн. наук, профессор Е. И. Борзенко)

Фролов С. В.
Ф91 Высшая математика : этюды по теории и её приложениям : учеб. пособие / С. В. Фролов, А. Ш. Багаутдинова. — СПб. : ГИОРД, 2012. — 616 с.

ISBN 978-5-98879-149-2

Материал, сгруппированный по основным разделам математики (дифференциальное исчисление, интегралы, дифференциальные уравнения, ряды и пр.), пополнен некоторыми темами, не входящими в стандартный курс. В книге показано, как на практике работают разделы, изучаемые в курсе высшей математики. Учебное пособие способствует преодолению разрыва между материалом, излагаемым на первых курсах, и приложениями математики, с которыми студенты встречаются на последних стадиях обучения.

Предлагаемое издание предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности «Техническая физика», а также может быть использовано студентами иных естественно-научных и технических специальностей и преподавателями, ищущими красивые примеры для занятий, темы для студенческой научной работы, материал для математических кружков и т. д.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-98879-149-2

© ООО «Издательство „ГИОРД“», 2012

Оглавление

Предисловие	11
Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ	14
Тема 1. Устойчивость разностных схем решения задач математической физики.	14
Тема 2. Эллиптические координаты	19
Тема 3. Оптические свойства кривых второго порядка и устойчивость лазерного луча	24
Тема 4. Основы проективной геометрии.	29
Тема 5. Дважды линейчатые поверхности.	34
Тема 6. Рациональные параметризации и арифметика алгебраических кривых.	36
Тема 7. Группа единиц кольца остатков по целому модулю и асимметричная компьютерная криптография (схемы с открытым ключом)	53
Раздел 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	67
Тема 8. Явление радуги.	67
Тема 9. Реальные газы и уравнение Ван-дер-Ваальса.	69
Тема 10. Кривая намагничивания ферромагнетиков и явление гистерезиса . .	74
Тема 11. Метод наименьших квадратов.	78
Тема 12. Принцип минимума свободной энергии и каноническое распределение Гиббса	82
Тема 13. Простейшие особенности плоских кривых (крест, изолированная точка, клюв) и их распускания	84
Тема 14. Огибающие семейств кривых и их особенности	93
Раздел 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ	98
Тема 15. Кривизна и кручение пространственной кривой. Базис Френе и формулы Френе.	98
Тема 16. Кривизна поверхности. Гауссова кривизна и средняя кривизна.	103
Тема 17. Внутренняя геометрия поверхности. Параллельный перенос и геодезические. Локальная теорема Гаусса-Бонне. Плоскость Пуанкаре и геометрия Лобачевского	109

Тема 18. Эйлерова характеристика поверхности и глобальная теорема Гаусса-Бонне. Классификация компактных двумерных поверхностей. Хроматические числа и проблема четырёх красок	116
Тема 19. Непрерывные касательные векторные поля к двумерным поверхностям и теорема Пуанкаре. Теория Морса. Многообразия высших размерностей. Теорема о кобордизме и гипотеза Пуанкаре	126
Раздел 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	134
Тема 20. Комплексное дифференцирование, конформные отображения и гармонические функции.	134
Тема 21. Дробно-линейные отображения и задача о тепловых потерях трубопровода	137
Тема 22. Степенные отображения и задача о громоотводе.	142
Тема 23. Отображение Жуковского и обтекание цилиндра	144
Тема 24. Особые точки гармонических функций (источник, вихрь, диполь). Вихревые обтекания тел и подъёмная сила крыла.	150
Тема 25. Комплексная диэлектрическая проницаемость и СВЧ-нагрев пищевых продуктов.	153
Раздел 5. МНОГОЧЛЕНЫ, КОЛЬЦА, АЛГЕБРЫ, ГРУППЫ, ПОЛЯ	155
Тема 26. Многочлены: результат, дискриминант, теорема Безу	155
Тема 27. Арифметика мнимых квадратичных колец.	161
Тема 28. Кватернионы и вращения трёхмерного пространства. Процедура Кэли-Диксона и октавы. Теоремы Гурвица и Фробениуса. История становления векторного исчисления	171
Тема 29. Конечные некоммутативные группы. Группы перестановок и симметрий многоугольников и многогранников. Порождающие элементы, определяющие соотношения и графы групп. Разрешимые и простые группы	180
Тема 30. Римановы поверхности аналитических функций. Формула Римана-Гурвица. Группы Галуа и теорема Абеля.	196
Тема 31. Алгебраические расширения полей и построения с помощью циркуля и линейки.	202
Раздел 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.	209
Тема 32. Кинетика простейших химических реакций	209
Тема 33. Движение в центральном поле. Резерфордское рассеяние	212
Тема 34. Математический маятник и эллиптические интегралы	218
Тема 35. Энергия гравитационной дифференциации Земли, мантийная конвекция и дрейф континентов	227
Тема 36. Гамма- и бета-функции Эйлера, метод Лапласа и формула Стирлинга	238

Тема 37. Сферические координаты в n -мерном пространстве. Объём и площадь поверхности n -мерного шара	244
Тема 38. Магнитное поле контура с током, интеграл Гаусса и коэффициент зацепления.	248
Раздел 7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ).	252
Тема 39. Барометрическая формула в поле центробежной силы и определение молекулярной массы высокомолекулярных соединений	252
Тема 40. Последовательные химические реакции и максимальный выход промежуточного продукта	253
Тема 41. Функция распределения продукта по времени пребывания в аппаратах непрерывного действия	254
Тема 42. Отвод тепла при хранении плодоовощной продукции	256
Раздел 8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ (КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ).	262
Тема 43. Затухающие колебания. Линейный и нелинейный резонанс. Уравнение Дуффинга	262
Тема 44. Теория флаттера.	266
Тема 45. Задача Штурма-Лиувилля для радиальной части оператора Лапласа. Функции Бесселя. Приближённое решение прямым вариационным методом	270
Тема 46. Нелинейные задачи на собственные значения. Задача Эйлера о потере устойчивости колонны.	280
Тема 47. Угловая часть оператора Лапласа в полярных и сферических координатах. Многочлены и функции Лежандра	284
Тема 48. Уравнения с периодическими коэффициентами. Матрица монотропии и решения Флоке. Параметрический резонанс	291
Тема 49. Квазиклассическое приближение, туннельный эффект и альфа-распад атомных ядер	299
Раздел 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ)	304
Тема 50. Модели конкуренции и модель хищник-жертва	304
Тема 51. Модель роста и таяния ледника и глобальный климат	309
Тема 52. Ламповый генератор и уравнения Ван-дер-Поля	313
Тема 53. Анализ устойчивости предельного цикла. Задача Жуковского о виброразделении смесей	318
Тема 54. Вырождение собственных частот и вековые слагаемые. Задача о рациональной компоновке автомобиля.	320

Тема 55. Устойчивость Лагранжевых движений в ограниченной задаче трёх тел	324
Тема 56. Движение в центральном поле: замкнутость траекторий, скрытая симметрия кулоновского потенциала, потенциалы Ленца и задача Максвелла о «рыбьем глазе»	335
Раздел 10. РЯДЫ	342
Тема 57. Асимптотическое разложение Эйлера-Маклорена. Числа Бернулли	342
Тема 58. Распределение простых чисел. Функции Мангольда и Римана и гипотеза Римана	348
Тема 59. Явление Гиббса и проблема окантовки при компьютерном сжатии изображений. Вейвлеты	356
Раздел 11. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 1	360
Тема 60. Кинематика движения сплошной среды. Уравнение неразрывности и метод характеристик. «Блины Зельдовича» и крупномасштабное распределение вещества во Вселенной	360
Тема 61. Задача остывания (нагрева) тела. Метод разделения переменных. Самосопряжённая эллиптическая краевая задача	366
Тема 62. Квазиодномерная нестационарная теплопроводность, регулярный тепловой режим и вариационный метод	369
Тема 63. Квазиодномерная стационарная теплопроводность, тепловое сопротивление квазиодномерной стенки	373
Тема 64. Процессы кристаллизации и задача Стефана. Автомодельное решение. Квазистационарное приближение и формула Планка	375
Тема 65. Теплопроводность неоднородных тел. Методы неравновесной термодинамики и принцип Пригожина. Формула Эйкена	378
Раздел 12. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 2	387
Тема 66. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса). Задача Стокса о медленном движении шара. Парадоксы Стокса и Уайтхеда и решение Озеена	387
Тема 67. Уравнения Прандтля пограничного слоя. Решение Блаузиуса. Метод сшивания асимптотических разложений. Теплоотдача при ламинарном обтекании пластины	396
Тема 68. Волны на поверхности воды. Уравнение Кордевега-де-Фриза, солитоны и уединённые волны	403
Тема 69. Дислокации в кристаллах, модель Френкеля-Конторовой и уравнение синус-Гордон	411
Тема 70. Теплоотдача при стекании плёнки жидкости	415
Тема 71. Функция распределения продукта по времени пребывания — модель «дрейф + диффузия». Условия Данкверста	419

Раздел 13. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 3	423
Тема 72. Уравнение Шредингера в центрально-симметричном поле. Кулоновский потенциал и вырождение уровней в атоме водорода. Потенциал гармонического осциллятора	423
Тема 73. Потенциалы Ленца, модель Томаса-Ферми и строение периодической системы элементов (правило Маделунга)	431
Тема 74. Вариационный метод приближённого решения задач квантовой механики. Потенциал ионизации атома гелия и двухэлектронных ионов	437
Тема 75. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Коэффициенты прохождения и отражения, туннельный эффект. Безотражательные потенциалы	441
Тема 76. Тепловая конвекция, задача Релея и система Лоренца	445
Раздел 14. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	452
Тема 77. Некоторые парадоксы элементарной теории вероятностей	452
Тема 78. Ветвящиеся процессы и проблема вымирания в теории эволюции	462
Тема 79. Процессы случайного блуждания: вероятность возврата, связь с диффузией	467
Тема 80. Коэффициент корреляции и анализ зависимости источников в историографии	470
Тема 81. Пространства с мерой. Парадоксы неизмеримости	474
Раздел 15. ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	478
Тема 82. Динамические системы с инвариантной мерой. Эргодическая теорема Биркгофа и обоснование статистической механики. Теорема Пуанкаре о возвращении. Перемешивание и термодинамическая необратимость	478
Тема 83. Энтропия Колмогорова-Синая и проблема изоморфизма сдвигов Бернулли	491
Тема 84. Цепные дроби и приближения иррациональных чисел рациональными. Проблема построения календарей. Алгебраические и трансцендентные числа. Уравнение Пееля и единицы действительных квадратических колец	495
Тема 85. Динамические системы, связанные с цепными дробями. Теорема Хинчина-Леви	510
Тема 86. Отображение отрезка в себя: каскад удвоений, универсальность Фейгенбаума и ренорм-группа	513
Тема 87. Странные аттракторы, фракталы и хаусдорфова размерность	518
Тема 88. Сосуществование циклов, теорема Шарковского, топологическая и ляпуновская энтропии	534

Тема 89. Интегрируемые и неинтегрируемые гамильтоновы системы. Малые знаменатели и КАМ-теория. Расщепление сепаратрисс и отображение Чирикова	550
Раздел 16. ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА	563
Тема 90. Понятие количества информации — вероятностный подход. Формулы Хартли и Шеннона. Условная информация	563
Тема 91. Количество информации — алгоритмический подход. Частично и общерекурсивные функции, тезис Чёрча. Перечислимые и разрешимые множества. Теорема Колмогорова	567
Тема 92. Теория Рамсея, функция Аккермана, теорема Париса-Харрингтона и неполнота арифметики	572
Тема 93. Кодирование информации. Проблема однозначности декодирования. Неравенство Крафта. Полные коды	578
Тема 94. Префиксные коды. Код Хаффмана. Арифметическое кодирование	580
Тема 95. Словарные алгоритмы сжатия информации. Коды Зива-Лемпела	585
Тема 96. Блочные методы сжатия информации. Преобразование Барроуза-Уиллера	589
Тема 97. Фрактальное сжатие изображений	592
Тема 98. Помехоустойчивое кодирование. Линейные коды, генерирующая и проверочная матрицы. Код Хэмминга. Плотные упакованные коды	595
Тема 99. Проблема максимума определителя, матрицы Адамара и эквидистантные коды	600
Тема 100. Ассоциативная память. Спиновые стёкла и модель Хопфилда	604