

УДК 51(09)  
ББК 22.1Г(0).Д  
В 18



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №07-01-07068.

### Варадараджан В. С.

Эйлер сквозь призму времени. Новый взгляд на старые проблемы. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 448 с.

Предлагаемое издание, приуроченное к 300-летию со дня рождения великого математика Леонарда Эйлера, раскрывает основные идеи ученого, а также их значимость для современности. Основная часть книги посвящена анализу трудов Эйлера в области бесконечных рядов и произведений, их восприятию в наши дни (теория значений  $\zeta$ -функции, расходящиеся ряды и интегралы). Представлен краткий обзор некоторых других исследований Эйлера, например, в области эллиптических интегралов и теории чисел. Его работа над эллиптическими интегралами предшествовала современной теории эллиптических кривых и абелевых вариаций; а его труд по теории чисел затронул такие вопросы, которые могут быть полностью осознаны только после развития теории полей классов. В одной из глав приведено краткое описание эйлеровской теории произведений, которой он положил начало, но смысл которой стал раскрываться только с появлением работ Дирихле. Просуществовав долгое время, эта теория наконец-то достигла наивысшего развития с появлением в конце 19 века исследований по теории чисел, а также в связи с очень популярной в настоящее время программой Ленглендса. Таким образом, некоторые части данной главы можно рассматривать как краткое введение в программу Ленглендса.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и исследователей, а также для всех тех, кто интересуется историей математики, а в частности, исследованиями Эйлера и их развитием в современной науке.

**ISBN 978-5-93972-703-7**

**ББК 22.1Г (0).Д**

Оригинальное издание опубликовано на английском языке издательством American Mathematical Society под названием *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*.

© 2006 American Mathematical Society. Перевод выполнен и опубликован Научно-издательским центром «Регулярная и хаотическая динамика» по соглашению с American Mathematical Society.

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	vii
<b>ГЛАВА 1. Леонард Эйлер (1707–1783)</b> . . . . .	1
1.1. Введение . . . . .	1
1.2. Ранние годы . . . . .	5
1.3. Первый петербургский период (1727–1741) . . . . .	10
1.4. Берлинский период (1741–1766) . . . . .	14
1.5. Второй петербургский период и последние годы (1766–1783) . . . . .	16
1.6. <i>Opera Omnia</i> . . . . .	17
1.7. Личность Эйлера . . . . .	18
Литература . . . . .	19
<b>ГЛАВА 2. Математик-универсал</b> . . . . .	26
2.1. Введение . . . . .	26
2.2. Математический анализ . . . . .	26
2.3. Эллиптические интегралы . . . . .	30
2.4. Вариационное исчисление . . . . .	45
2.5. Теория чисел . . . . .	51
Литература . . . . .	80
<b>ГЛАВА 3. Значения дзета-функции</b> . . . . .	83
3.1. Краткий обзор . . . . .	83
3.2. Некоторые замечания о бесконечных рядах и произведениях и их значениях . . . . .	90
3.3. Вычисление значений $\zeta(2)$ и $\zeta(4)$ . . . . .	97
3.4. Бесконечные произведения для тригонометрических и гипер- болических функций . . . . .	110
3.5. Разложение функций $(\sin x)^{-1}$ и $\operatorname{ctg} x$ на элементарные дро- би. Вычисление значений $\zeta(2k)$ и $L(2k + 1)$ . . . . .	124
3.6. Разложения на элементарные дроби как интегралы . . . . .	135
3.7. Значения кратной дзета-функции . . . . .	151
Литература . . . . .	160

<b>ГЛАВА 4. Формула суммирования Эйлера–Маклорена</b>	163
4.1. Формальный вывод	163
4.2. Случай полиномиальной функции	168
4.3. Формула суммирования с остаточными членами	169
4.4. Применения	174
Литература	179
<b>ГЛАВА 5. Расходящиеся ряды и интегралы</b>	180
5.1. Расходящиеся ряды. Идеи Эйлера относительно суммирования таких рядов	180
5.2. Эйлеров вывод функционального уравнения для дзета-функции	189
5.3. Суммирование Эйлером рядов факториалов	199
5.4. Общая теория суммирования расходящихся рядов	209
5.5. Суммирование в смысле Бореля	220
5.6. Тауберовы теоремы	229
5.7. Некоторые применения	235
5.8. Интеграл Фурье, тауберова теорема Винера и преобразование Гельфанда на коммутативных алгебрах Банаха	248
5.9. Обобщенные функции и размытое суммирование	268
5.10. Гауссовы интегралы, винеровская мера и интегралы по траекториям Фейнмана–Каца	278
Литература	300
<b>ГЛАВА 6. Эйлеровы произведения</b>	306
6.1. Эйлеровы произведения для дзета-функции и родственных ей функций	306
6.2. Эйлеровы произведения от Дирихле до Гекке	314
6.3. Эйлеровы произведения от Рамануджана и Гекке до Ленглендса	347
6.4. Абелевы расширения и теория полей классов	366
6.5. Неабелевы $L$ -функции Артина	383
6.6. Программа Ленглендса	385
Литература	387
<b>Портретная галерея</b>	390
<b>Образцы страниц <i>Opera Omnia</i></b>	427
<b>Предметный указатель</b>	433
<b>Именной указатель</b>	436