

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. Д. Кургалин, С. В. Борзунов, С. Н. Синицина

ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Содержание

Введение	4
1 Логика и доказательство	5
2 Задачи к главе «Логика и доказательство»	6
3 Теория множеств	13
4 Задачи к главе «Теория множеств»	16
5 Система с базой знаний	22
6 Задачи к главе «Система с базой знаний»	23
7 Отношения	26
8 Задачи к главе «Отношения»	28
9 Функции	40
10 Задачи к главе «Функции»	41
11 Комбинаторика	49
12 Задачи к главе «Комбинаторика»	50
13 Графы	62
14 Задачи к главе «Графы»	64

2. *Обратное рассуждение*: прямым рассуждением доказывается истинность высказывания $(\text{не } Q) \Rightarrow (\text{не } P)$ как логически эквивалентного $(P \Rightarrow Q)$.
3. Метод «от противного»: предполагается истинность P и ложность Q и на основе аргументированных рассуждений получается противоречие.

Принцип математической индукции.

Пусть $P(n)$ — предикат, определённый для всех натуральных чисел n .

Предположим, что

1. $P(1)$ истинно и
2. $\forall k \geq 1$ импликация $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$ верна.

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном n .

2 Задачи к главе «Логика и доказательство»

1. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A \text{ и } B) \Rightarrow C$.

Решение:

Составим таблицу истинности приведённых высказываний.

A	B	C	$A \text{ и } B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(A \text{ и } B) \Rightarrow C$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И

Два последних столбца совпадают, поэтому соответствующие выражения логически эквивалентны.

2. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $\text{не } C \Rightarrow ((\text{не } A) \text{ или } (\text{не } B))$.

Решение:

Обозначим: $P_1 = A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $P_2 = \text{не } C \Rightarrow ((\text{не } A) \text{ или } (\text{не } B))$.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$(\text{не } A) \text{ или } (\text{не } B)$	P_1	P_2
И	И	И	И	Л	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Из сравнения двух последних столбцов следует логическая эквивалентность P_1 и P_2 .

3. Покажите, что высказывание $A \text{ или } (B \text{ и } C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } C)$.

Решение:

Задача решается составлением таблицы истинности для высказываний $P_1 = A \text{ или } (B \text{ и } C)$, $P_2 = (A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } C)$.

A	B	C	$A \text{ или } B$	$A \text{ или } C$	$B \text{ и } C$	P_1	P_2
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

4. Покажите, что высказывание A и $(B$ или $C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A$ и $B)$ или $(A$ и $C)$.

Решение:

Задача решается составлением таблицы истинности для высказываний $P_1 = A$ и $(B$ или $C)$, $P_2 = (A$ и $B)$ или $(A$ и $C)$.

A	B	C	A и B	A и C	B или C	P_1	P_2
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

5. Является ли высказывание $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A$ и $B) \Rightarrow C)$ тавтологией?

Ответ: Приведенное высказывание является тавтологией.

6. Является ли высказывание $(A$ и $(B$ или $C)) \Rightarrow (A$ или $(B$ и $C))$ тавтологией?

Ответ: Не является.

7. Является ли высказывание $(A \Rightarrow B$ или $C) \Rightarrow (\text{не } B \Rightarrow A)$ тавтологией?

Ответ: Не является.

8. Является ли высказывание $(A$ и $B \Rightarrow C) \Rightarrow (\text{не } C \Rightarrow A)$ тавтологией?

Ответ: Не является.

9. Докажите методом математической индукции высказывание: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ для всех натуральных чисел n .