

Н. Н. Веричев, С. Н. Веричев,  
С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев

**ХАОС, СИНХРОНИЗАЦИЯ  
И СТРУКТУРЫ  
В ДИНАМИКЕ РОТАТОРОВ**

ФГУП «Российский федеральный ядерный центр –  
Всероссийский научно-исследовательский институт  
экспериментальной физики»

**Н. Н. Веричев, С. Н. Веричев,  
С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев**

# **ХАОС, СИНХРОНИЗАЦИЯ И СТРУКТУРЫ В ДИНАМИКЕ РОТАТОРОВ**

Саров  
2016

УДК 517.938  
ББК 22.161.6  
X 19

X 19 **Веричев, Н. Н., Веричев, С. Н., Герасимов, С. И., Ерофеев, В. И. Хаос, синхронизация и структуры в динамике ротаторов** / Н. Н. Веричев, С. Н. Веричев, С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2016. – 267 с., ил.

ISBN 978-5-9515-0324-4

Монография посвящена динамике систем с цилиндрическим фазовым пространством. Данный класс моделей охватывает механические, квантово-механические, радиотехнические и многие другие системы из различных областей естествознания и технических приложений. Рассматриваются автономные и неавтономные системы с одной, полутора, двумя и более степенями свободы. Исследования и изложение материала проводятся в традициях школы нелинейных колебаний академика А. А. Андропова: в контексте фазового пространства моделей с привлечением методов качественной теории дифференциальных уравнений, теории бифуркаций и качественно-численных методов. Исследуются качественные картины характеристик вращения ротаторов и резонансные характеристики колебательных систем. Показана неопределенность и нестабильность этих характеристик в областях существования странных аттракторов, среди которых аттракторы Лоренца, Фейгенбаума, Шильникова и др. Рассматриваются кластерные структуры в однородных и упорядоченно неоднородных решетках динамических систем. Дана классификация кластерных структур и доказана ограниченность числа их типов для цепочки и кольца. Рассматриваются вопросы устойчивости кластерных структур.

Издание предназначено для студентов вузов и аспирантов, а также специалистов, работающих в области машиностроения.

УДК 517.938  
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-9515-0324-4

© ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Глава 1. АВТОНОМНЫЕ И НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ</b> .....	8
1.1. Динамика автономного ротатора и физические системы .....	8
1.2. Синхронизация и хаотические вращения неавтономного ротатора .....	19
<b>Глава 2. АВТОНОМНЫЕ И НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОЛУТОРА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ</b> .....	39
2.1. Динамика ротатора с апериодической нагрузкой .....	39
2.2. Синхронизация и динамический хаос в системе неавтономного ротатора с апериодической нагрузкой .....	51
<b>Глава 3. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ</b> .....	69
3.1. Динамика ротатора с колебательной нагрузкой .....	69
3.2. Хаотическая динамика простого вибрационного механизма .....	78
3.3. Динамика связанных ротаторов .....	94
<b>Глава 4. КОЛЕБАНИЯ ВАЛОВ</b> .....	107
4.1. Нелинейный резонанс изгибных колебаний гибкого ротора в системе с источником возбуждения ограниченной мощности .....	107
4.2. Гашение изгибных колебаний вала модуляцией частоты вращения двигателя .....	121
4.3. Хаотические крутильные колебания вала в системе с источником возбуждения ограниченной мощности .....	131
<b>Глава 5. СИНХРОНИЗАЦИЯ В ОДНОРОДНЫХ РЕШЕТКАХ</b> .....	150
5.1. Синхронизация в решетках динамических систем. Общие сведения .....	150

5.2. Синхронизация вращений в цепочке и кольце диффузионно-связанных автономных и неавтономных ротаторов .....	161
5.3. Регулярная и хаотическая синхронизация в однородной цепочке динамических систем «ротатор – осциллятор» .....	170
<b>Глава 6. ФИЗИКА, СУЩЕСТВОВАНИЕ, СИНТЕЗ И УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАСТЕРНЫХ СТРУКТУР .....</b>	<b>178</b>
6.1. Физика кластерных структур .....	179
6.2. Синтез и общие свойства схем кластерных структур .....	195
6.3. К-осцилляторы цепочки и полнота типов ее кластерных структур .....	204
6.4. К-осцилляторы кольца и синтез кластерных структур .....	218
6.5. Устойчивость кластерных структур .....	232
<b>Приложение I. Алгоритмы преобразования систем связанных ротаторов к стандартной форме .....</b>	<b>244</b>
<b>Приложение II. Вычисление собственных значений матриц .....</b>	<b>257</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>260</b>

31. Shilnikov L. P., Turaev D. V. A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. II «Methods of qualitative theory of differential equations and related topics». 2000. Vol. 200. P. 165–188.

32. Белых В. Н., Веричев Н. Н. О динамике взаимодействующих ротатора и осциллятора // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1988. № 7.

33. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976.

34. Блехман И. И. Вибрации в технике. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979.

35. Веричев Н. Н., Веричев С. Н., Ерофеев В. И. Хаотическая динамика вибрационных механизмов с источниками энергии ограниченной мощности // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, № 3. С. 439–450.

36. Веричев Н. Н. Исследование систем с джозефсоновскими контактами методом быстро вращающейся фазы // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31, № 11. С. 2267–2274.

37. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Моск. матем. общ-ва. 1982. Т. 44. С. 180–212.

38. Feigenbaum M. J. Quantitative universaliti for a class nonlinear trasformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, N 1. P. 25–52.

39. Минц Р. М. Исследование траекторий системы трех дифференциальных уравнений в бесконечности // Памяти А. А. Андропова. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 499–534.

40. Белых В. Н., Веричев Н. Н. О динамике взаимосвязанных ротаторов // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1988. Т. XXXI, № 6. С. 688–697.

41. Белых В. Н., Веричев Н. Н. О сложной динамике одной автономной системы с джозефсоновскими контактами // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 31, № 1. С. 140–147.

42. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130–141.

43. Sommerfeld A. // VDI. 1904. Vol. 18.

44. Калищук А. К. Элементарный способ изучения динамических свойств систем // ЖТФ. 1936. Вып. 9, № 8. С. 687–696.



45. Мартышкин В. С. Установка для изучения динамических характеристик строительных материалов // Динамические свойства строительных материалов. – М.: Стройиздат, 1940.
46. Блехман И. И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // Инженерный сборник. 1953. Т. 16. С. 49–72.
47. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964.
48. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970.
49. Пат. РФ № 2456481 С2, МПК F04D15/00, F04D13/10. Подавление поперечных вибраций электроцентробежного насоса посредством модулирования скорости вращения двигателя / Н. Н. Веричев, Н. С. Веричев // Бюл. изобр. 20.07.2012.
50. Веричев Н. Н., Веричев С. Н., Ерофеев В. И. Гашение изгибных колебаний вращающегося вала // Вестник машиностроения. 2012. № 8. С. 26–30.
51. Verichev N. N. Chaotic torsional vibration of imbalanced shaft driven by a limited power supply // J. of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331, Iss. 2. P. 384–393.
52. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 39. С. 561.
53. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Сбитнев В. И. // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 6. С. 338.
54. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 1707.
55. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 628.
56. Арансон И. В., Веричев Н. Н. Динамика квазипериодических волновых движений в однонаправленных цепочках генераторов // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 1. С. 29–40.
57. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. – Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
58. Абарбанель Г. Д., Рабинович М. И., Селверстон А. и др. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 363–390.

59. Борисюк Г. Н., Борисюк Р. М., Казанович Я. Б., Селверстон А. и др. Моделирование динамики нейронной активности и обработка информации в мозге – итоги «десятилетия» // УФН. 2002. Т. 172, № 10. С. 1189–1214.
60. Carpenter G. A. Neural network models for pattern recognition and associative memory // Neural Networks. 1989. Vol. 2. P. 243–257.
61. Kohonen T. Self-organizing maps. – Berlin: Shpringer, 1997.
62. Tan Z., Ali M. K. Pattern recognition in a neural network with chaos // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 36–49.
63. Веричев Н. Н. Устойчивость структур в неравновесных системах // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 1. С. 23–33.
64. Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
65. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
66. Белых В. Н., Веричев Н. Н. Пространственно-однородные автоволновые процессы в системах с переносом и диффузией // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 5. С. 588–596.
67. Веричев Н. Н., Веричев С. Н., Ерофеев В. И. Кластерная динамика однородной цепочки диссипативно связанных ротаторов // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 6. С. 882–897.
68. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 795.
69. Белых В. Н., Белых И. В., Веричев Н. Н. Регулярные и хаотические пространственно-однородные колебания в цепочке взаимосвязанных сверхпроводящих переходов // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1997. Т. 15, № 7. С. 912–924.
70. Белых И. В., Веричев Н. Н. Глобальная синхронизация и странные аттракторы в связанных маятниковых системах // Вестник ННГУ Нелинейная динамика и хаос. 1997. Т. 2. С. 93–102.
71. Josic K. Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 3053–3056.
72. Kaneko K. Relevance of clustering to biological networks // Phys. D. 1994. Vol. 75. P. 55–73.
73. Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements // Phys. D. 1990. Vol. 41. P. 137–172.



74. Georgiou I. T., Bajaj A. K., Corless M. Invariant manifolds and chaotic vibrations in singularly perturbed nonlinear oscillators // *Int. J. Eng. Sci.* 1998. Vol. 36. P. 431–458.
75. Belykh V. N., Belykh I. V., Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62. P. 6332–6345.
76. Belykh V. N., Belykh I. V., Mosekilde E. Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. P. 036216.
77. Belykh V., Belykh I., Hasler M., Nevidin K. Cluster synchronization in three-dimensional lattices of diffusively coupled oscillators // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2003. Vol. 13. P. 755–779.
78. Okuda K. Variety and generality of clustering in globally coupled oscillators // *Phys. D*. 1993. Vol. 63. P. 424–436.
79. Xie F., Hu G. // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 79.
80. Hasler M., Maistrenko Yu., Popovich O. // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. 6843.
81. Zanette D. H., Mikailov A. S. // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. P. 276.
82. Verichev N. N. C-oscillators and new outlook on cluster dynamics // *J. of Phys. Conf. Ser.* 23. 2005. P. 23–46.
83. Verichev N. N., Verichev S. N., Wiercigroch M. Physical interpretation and theory of existence of cluster structures in lattices of dynamical systems // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2007. Vol. 34, Iss. 4. P. 1082–1104.
84. Веричев Н. Н. Физика, существование и синтез кластерных структур связанных динамических систем // *Нелинейный мир*. 2009. Т. 7, № 1. С. 28–45.
85. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // *IEEE Transaction on Circuits & Systems*. 1986. Vol. CAS-33, N 11. P. 1073–1118.
86. Special Issue on Chua's Circuit // *J. of Circuit, Systems, and Computers*. 1993. Vol. 3, N 2.
87. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002.
88. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. – New York: Freeman, 1982.

89. Потапов А. А., Гильмутдинов А. Х., Ушаков П. А. Фрактальные элементы и радиосистемы. Физические аспекты. – М.: Радиотехника, 2009.

90. Вонсовский С. В. Современная естественнонаучная картина мира. – Изд-во РХД, 2006.

91. Агол В. И., Богданов А. А., Гвоздев В. А. и др. Молекулярная биология. Структура и биосинтез нуклеиновых кислот / Под ред. А. С. Спирина. – М.: Высшая школа, 1990.

92. Osipov G. V., Sushchik M. M. Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7198.

93. Kanakov O. I, Osipov G. V., Chan C.-K., Kurths J. Cluster synchronization and spatio-temporal dynamics in networks of oscillatory and excitable Luo-Rudy cells // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. Vol. 17. P. 015111.

94. Pecora L. M., Carroll T. L. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 2109–2112.

95. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. – М: Наука, 1984.

96. Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D. Chaotic synchronization: applications to living systems. – Singapore: World Scientific, 2002.

97. Wang W., Kiss I. Z., Hudson J. L. // Chaos. 2000. Vol. 10. P. 248.

98. Roy R., Thornburg K. S. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 72. P. 2009.

99. Cuomo K. M., Oppenheim A. V. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 65.

100. Веричев Н. Н., Веричев С. Н., Ерофеев В. И. К-осцилляторы в однородном кольце диффузионно-связанных динамических систем: существование, устойчивость и синтез кластерных структур // Нелинейный мир. 2008. Т. 6, № 56. С. 398–423.

101. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966.

102. Былов Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966.

103. Мышкис А. Д. Математика. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971.

Научное издание

Н. Н. Веричев, С. Н. Веричев,  
С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев

## **Хаос, синхронизация и структуры в динамике ротаторов**

Редактор, корректор *Н. Ю. Зимакова*  
Компьютерная подготовка оригинала-макета *С. Н. Фролова*  
Дизайн обложки *Т. В. Андреева*

---

Подписано в печать 08.12.2016    Формат 60×90/16    Печать офсетная  
Усл. печ. л. ~16,7    Уч.-изд. л. ~15,3    Тираж 200 экз.    Зак. тип. 36-2016

---

Отпечатано в Издательско-полиграфическом комплексе  
ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»  
607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23