

УДК 517.9  
ББК 22.161.6  
С 888

---

Перевод и издание книги выполнены при поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.Г34.31.0039

---

### Стюарт Д. Е.

Динамика систем с неравенствами: удары и жесткие связи: Пер. с англ. А. П. Иванова. — М. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. — 544 с.

В монографии представлено современное состояние теории систем с ограничениями в виде неравенств. Приложения этой теории включают динамику механических систем с ударами и трением, диодные и транзисторные цепи, экономические и транспортные сети, биологические системы с ограничениями ресурсов и пр. Автор вводит понятие индекса системы, которое является ключом для определения математического аппарата, необходимого для ее исследования. В состав этого аппарата входят вариационные неравенства, комплементарность, выпуклая оптимизация, оснащенные гильбертовы пространства, численные методы. Следует отметить, что многие из этих методов развиты в последние два десятилетия и сведения о них недостаточно опубликованы на русском языке.

Вся необходимая вспомогательная теоретическая информация приведена в приложениях к книге, что делает ее доступной для понимания. Изложение иллюстрируется большим числом примеров, имеющих практическое значение.

Книга адресована специалистам в области механики, негладкой динамики и теории оптимизации, студентам старших курсов и аспирантам.

**ISBN 978-5-4344-0104-3**

**ББК 22.161.6**

*Dynamics with Inequalities: Impacts and Hard Constraints*

© Society for Industrial and Applied Mathematics.

Published by Izhevsk Institute of Computer Science with permission.

© Перевод на русский язык:

Институт компьютерных исследований, 2013

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	xi
<b>ГЛАВА 1. Некоторые примеры</b> . . . . .	1
1.1. Механический удар . . . . .	2
1.1.1. Мяч на столе . . . . .	2
1.1.2. Более сложные системы твердых тел с ударом . . . . .	4
1.1.3. Удар упругих тел . . . . .	6
1.2. Кулоново трение . . . . .	7
1.3. Диоды и транзисторы . . . . .	11
1.3.1. Диодные цепи . . . . .	11
1.3.2. Транзисторы с биполярным переходом . . . . .	14
1.3.3. Линии передач с диодами . . . . .	15
1.4. Очереди и ограничения ресурсов . . . . .	17
1.4.1. Очереди . . . . .	17
1.4.2. Транспортный поток . . . . .	19
1.4.3. Ограничения биологических ресурсов . . . . .	20
<b>ГЛАВА 2. Статические задачи</b> . . . . .	23
2.1. Основные инструменты . . . . .	23
2.1.1. Выпуклый анализ . . . . .	25
2.1.2. Множественнозначные функции . . . . .	27
2.1.3. Полунепрерывность сверху и замкнутость графика . . . . .	30
2.1.4. Соображения измеримости . . . . .	40
2.2. Проблемы дополнителности . . . . .	42
2.2.1. Алгоритм Лемке . . . . .	43
2.2.2. Метод Лемке и методы гомотопии . . . . .	51
2.2.3. Многогранные конусы . . . . .	53
2.2.4. Специальные структуры . . . . .	54
2.2.5. Дополнителность в бесконечномерном случае . . . . .	57
2.3. Вариационные неравенства . . . . .	58
2.3.1. Вариационные неравенства второго рода . . . . .	60
2.3.2. Эквивалентные формулировки . . . . .	61

2.3.3.	Оценки решений проблем дополнителъности . . . . .	63
2.3.4.	Существование и единственность в конечномерном случае . . . . .	67
2.3.5.	Существование решений бесконечномерных проблем .	71
2.3.6.	Выпуклые функции и субдифференциалы . . . . .	73
2.4.	Максимальные монотонные операторы . . . . .	74
2.4.1.	Основные свойства . . . . .	75
2.4.2.	Дальнейшие примеры максимальных монотонных операторов . . . . .	84
2.4.3.	Суммы максимальных монотонных операторов . . . . .	88
2.4.4.	Вариационные неравенства и множители Лагранжа . .	92
2.5.	Псевдомонотонные операторы . . . . .	95
2.6.	Проблема Синьорини . . . . .	98
<b>ГЛАВА 3. Формализмы . . . . .</b>		<b>105</b>
3.1.	Дифференциальные вариационные неравенства . . . . .	105
3.1.1.	Обсуждение смысла понятий . . . . .	108
3.2.	Понятие индекса . . . . .	110
3.2.1.	Поведение решений . . . . .	112
3.2.2.	Проблемы индекса нуль . . . . .	113
3.2.3.	Проблемы единичного индекса . . . . .	114
3.2.4.	Проблемы индекса два . . . . .	115
3.2.5.	Индекс три и выше . . . . .	117
3.3.	Бесконечномерные проблемы . . . . .	119
3.3.1.	Тройки Гельфанда . . . . .	121
3.3.2.	Интерполяционные пространства в тройках Гельфанда	125
3.4.	Леммы о дифференцировании . . . . .	126
3.4.1.	Леммы о дифференцировании для проблем дополнителъности . . . . .	127
3.4.2.	Леммы о дифференцировании для вариационных неравенств . . . . .	134
<b>ГЛАВА 4. Вариации на тему . . . . .</b>		<b>137</b>
4.1.	Дифференциальные неравенства . . . . .	137
4.1.1.	Множественнозначные интегралы . . . . .	139
4.1.2.	Интегральное и дифференциальное определения решений дифференциальных включений . . . . .	143
4.1.3.	Существование решений дифференциальных включений . . . . .	143

4.1.4.	Сравнение с дифференциальными вариационными неравенствами . . . . .	149
4.2.	Максимальные монотонные операторы и дифференциальные включения . . . . .	152
4.2.1.	Теория максимальных монотонных дифференциальных включений . . . . .	152
4.2.2.	Максимальные монотонные операторы и тройки Гельфанда . . . . .	160
4.2.3.	Приложения к уравнению теплопроводности и задачам с препятствиями . . . . .	162
4.2.4.	Единственность решений и максимальные монотонные операторы . . . . .	165
4.3.	Спроектированные динамические системы . . . . .	168
4.4.	Процессы выметания . . . . .	170
4.4.1.	Чистые процессы выметания . . . . .	170
4.4.2.	Дифференциальные включения для мер . . . . .	171
4.4.3.	Правило произведения Моро . . . . .	177
4.4.4.	ДВМ и разрывные процессы выметания . . . . .	179
4.5.	Линейные системы дополнителности . . . . .	188
4.6.	Конволюционные проблемы дополнителности . . . . .	194
4.6.1.	Конволюционные проблемы дополнителности индекса нуль . . . . .	195
4.6.2.	КПД индекса один . . . . .	196
4.6.3.	КПД индекса два и выше . . . . .	197
4.6.4.	Проблемы с дробным индексом . . . . .	197
4.7.	Параболические вариационные неравенства . . . . .	198
4.7.1.	Сравнение с максимальными монотонными дифференциальными включениями . . . . .	199
4.7.2.	Сравнение с дифференциальными вариационными неравенствами . . . . .	200
<b>ГЛАВА 5. Индекс нуль и индекс единица . . . . .</b>		<b>203</b>
5.1.	Проблемы индекса нуль . . . . .	203
5.1.1.	Существование и единственность . . . . .	203
5.1.2.	Проблемы дополнителности индекса нуль . . . . .	206
5.1.3.	Нормальная податливость механического контакта . . . . .	207
5.2.	Проблемы индекса единица . . . . .	208
5.2.1.	ДВН чисто индекса единица . . . . .	209
5.2.2.	Единственность решения ДВН индекса единица . . . . .	223
5.3.	Конволюционные проблемы дополнителности . . . . .	230

5.3.1.	Существование решений КПД . . . . .	231
5.3.2.	Единственность решения КПД . . . . .	238
5.4.	Приложение: цепи с диодами . . . . .	245
5.4.1.	Получение дифференциальных уравнений для цепей . . . . .	245
5.4.2.	Включение диодов . . . . .	250
5.4.3.	Оценки на $\hat{Z}(s)$ и индекс единица . . . . .	253
5.4.4.	Замена токов на напряжения . . . . .	255
5.4.5.	Сравнение с другими подходами . . . . .	259
5.4.6.	Что если $H$ не является связным подграфом $G$ ? . . . . .	261
5.4.7.	Активные элементы и нелинейные цепи . . . . .	264
5.5.	Приложение: экономические сети . . . . .	267
5.5.1.	Транспортные сети . . . . .	270
5.5.2.	Динамическая транспортная модель . . . . .	273
5.5.3.	Существование . . . . .	276
5.5.4.	Единственность . . . . .	279
<b>ГЛАВА 6. Индекс два: задачи об ударе . . . . .</b>		<b>283</b>
6.1.	Динамика твердых тел . . . . .	283
6.1.1.	Лагранжева формулировка механики . . . . .	284
6.1.2.	Задачи без трения . . . . .	287
6.1.3.	Кулоново трение . . . . .	288
6.1.4.	Моделирование частично упругого восстановления . . . . .	292
6.1.5.	Технические вопросы . . . . .	295
6.1.6.	Парадокс Пенлеве . . . . .	297
6.1.7.	Решение парадокса Пенлеве . . . . .	299
6.1.8.	Подходы к общей проблеме существования . . . . .	302
6.1.9.	Доказательство существования с кулоновым трением . . . . .	303
6.1.10.	Границы моделей твердого тела . . . . .	315
6.2.	Удар упругих тел . . . . .	316
6.2.1.	Формулировка условий контакта . . . . .	319
6.2.2.	Формулировка условий контакта двух тел . . . . .	321
6.2.3.	Технические вопросы . . . . .	323
6.2.4.	Стержень Рауса . . . . .	325
6.2.5.	Вибрирующая струна . . . . .	328
6.2.6.	Абстрактное рассмотрение одного класса упругих тел . . . . .	339
6.2.7.	Доказательство существования . . . . .	342
6.2.8.	Общие упругие тела . . . . .	347
6.2.9.	Волновое уравнение: существование вследствие компенсации компактности . . . . .	350
6.2.10.	Волновое уравнение в полупространстве . . . . .	351

6.3.	Упругие тела . . . . .	355
6.3.1.	Удар без трения для вязкоупругих по Кельвину– Фойгту тел . . . . .	357
6.3.2.	Кулоново трение . . . . .	369
<b>ГЛАВА 7.</b>	<b>Проблемы с дробным индексом . . . . .</b>	<b>373</b>
7.1.	Дробное дифференцирование и интегрирование . . . . .	374
7.2.	Существование и единственность . . . . .	376
7.3.	Дальнейшие результаты о регулярности . . . . .	383
7.4.	Индекс между единицей и двумя . . . . .	384
<b>ГЛАВА 8.</b>	<b>Численные методы . . . . .</b>	<b>387</b>
8.1.	Выбор метода . . . . .	387
8.1.1.	Методы для гладких дифференциальных уравнений . . . . .	388
8.2.	Методы штрафов и редукции индекса . . . . .	390
8.3.	Кусочно-гладкие методы . . . . .	392
8.3.1.	Проблемы индекса нуль . . . . .	392
8.3.2.	Проблемы индекса единица . . . . .	393
8.3.3.	Переключение для проблем индекса нуль . . . . .	395
8.3.4.	Переключение для проблем индекса единица . . . . .	398
8.3.5.	Развитие алгоритма . . . . .	400
8.4.	Методы дискретизации времени . . . . .	401
8.4.1.	Методы Рунге–Кутты . . . . .	402
8.4.2.	Существование решений системы Рунге–Кутты . . . . .	409
8.4.3.	Порядок сходимости для гладких решений . . . . .	413
8.4.4.	Методы Рунге–Кутты на практике . . . . .	416
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А.</b>	<b>Некоторые сведения из функционального анали- за . . . . .</b>	<b>419</b>
A.1.	Метрические пространства . . . . .	419
A.2.	Векторные и банаховы пространства . . . . .	423
A.3.	Сопряженные пространства, гильбертовы пространства и сла- бая сходимость . . . . .	427
A.3.1.	Сопряженный оператор . . . . .	429
A.3.2.	Слабая топология против сильной . . . . .	429
A.3.3.	Компактность в конкретных пространствах . . . . .	431
A.4.	Распределения и меры . . . . .	433
A.5.	Пространства Соболева и уравнения в частных производных . . . . .	440
A.6.	Принципы нелинейного анализа . . . . .	445

<b>Приложение В. Выпуклый и негладкий анализ</b> . . . . .	449
В.1. Выпуклые множества и функции . . . . .	449
В.1.1. Опорные функции . . . . .	450
В.1.2. Выпуклые проекции в гильбертовых пространствах . . . . .	451
В.1.3. Выпуклые конусы . . . . .	453
В.1.4. Касательные конусы и нормальные конусы . . . . .	461
В.1.5. Существование точек минимума . . . . .	466
В.2. Субдифференциалы и обобщенные градиенты . . . . .	467
В.2.1. Двойственность по Фенхелю . . . . .	471
В.2.2. Выпуклая оптимизация при наличии ограничений и условия ККТ . . . . .	474
В.2.3. Инфинимальная конволюция . . . . .	478
В.2.4. Негладкий анализ: за пределами выпуклого анализа . . . . .	482
<b>Приложение С. Дифференциальные уравнения</b> . . . . .	485
С.1. Существование решений для липшицевых обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	485
С.2. Лемма Гронуолла и ее обобщения . . . . .	487
С.3. Теорема существования Каратеодори для непрерывных обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	490
С.4. Преобразования Лапласа и Фурье . . . . .	492
<b>Примечания</b> . . . . .	497
<b>Литература</b> . . . . .	503
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	521