

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

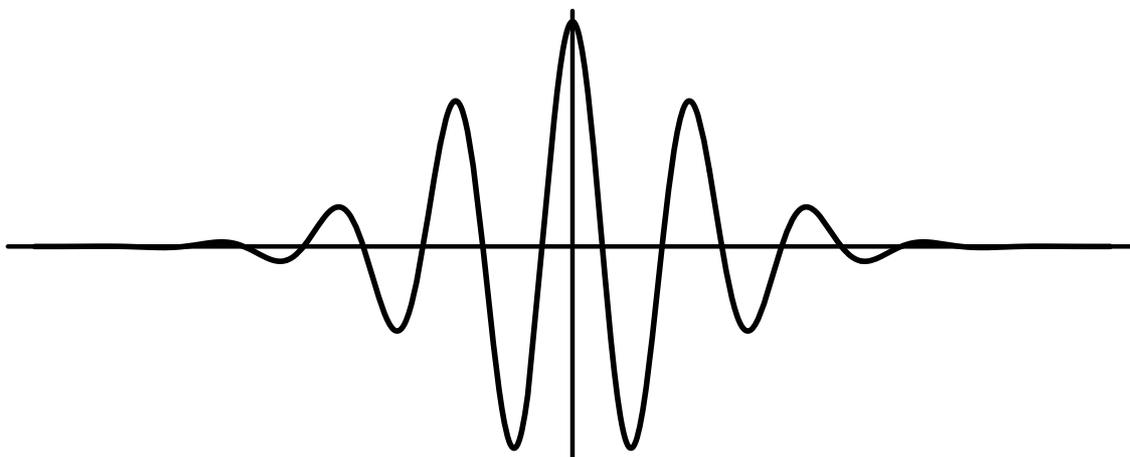
## НЕПРЕРЫВНОЕ ВСПЛЕСКОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:

И.Я. Новиков,

П.Г. Северов



Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета

2009

## Характеристика источников

**Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории / К. Блаттер. – М. : Техносфера, 2004. – 280 с.

Весь материал дан на высоком математическом уровне (для глубокого изучения требуется высокий уровень знаний по математическому и функциональному анализу). Автор рассматривает непрерывное всплесковое преобразование (ему посвящена целая глава), аналог формулы Планшереля, формулы обращения, функция ядра, а также убывание вейвлет-преобразований.

**Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

Непрерывное всплесковое преобразование рассматривается с точки зрения теории воспроизводящих ядер. Непрерывное всплесковое преобразование (далее НВП) сравнивается с оконным преобразованием Фурье. С помощью НВП автор определяет различные операторы и исследует характеристики локальной регулярности функций.

**Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла. – М. : Мир, 2005. – 671 с.

В отличие от монографий Блаттера К. и Добеши И., данная монография ориентирована на высококвалифицированных инженеров, интересующихся приложениями НВП к прикладным задачам. На ряду с общим понятием всплескового преобразования, в данной монографии вводится вещественное и аналитическое (комплексное) всплесковое преобразование. Для аналитического всплескового преобразования определяется локально-частотная плотность энергии  $P_w f$  (скэйлограмма). Далее рассматриваются вейвлет-хребты, которые показывают в каких точках скэйлограмма максимальна. Одним из важнейших моментов является рассмотрение максимумов модуля всплескового преобразования, которые в совокупности образуют линии максимумов (скелетоны). Скелетоны позволяют выявить различные особенности анализируемого сигнала. Большой объем работы посвящен обработке изображения.

Всплески стали необходимым математическим инструментом во многих исследованиях и очень популярными в самых различных приложениях. Всплески используются при анализе наблюдаемых данных (сейсмических и акустических сигналов (именно здесь впервые возник термин «wavelet»), динамике жидкости и турбулентности, строению поверхностей, потокам космических лучей, солнечному ветру, строению галактик). Всплесковое преобразование использовалось также для анализа последовательностей ДНК с целью выявить природу и происхождение дальних корреляций в этих последовательностях. Хорошо известен пример, когда ФБР использовало всплесковый анализ для сжатия информации, в результате чего удалось хранить большое количество отпечатков пальцев в сравнительно небольших компьютерах, что в свою очередь позволило сэкономить значительные средства. Это становится возможным за счет отбрасывания небольших всплесковых коэффициентов после того, как проведено прямое всплеск-преобразование.

Красота математического аппарата всплескового преобразования и его значение на практике привлекали и продолжают привлекать к себе исследователей, которые работают как над фундаментальными, так и над чисто прикладными вопросами.

Всюду в дальнейшем мы без специальных оговорок будем пользоваться основными определениями и обозначениями функционального анализа.

Для лучшего понимания интегрального всплескового преобразования рассмотрим близкие к нему преобразования, которые были известны ранее.

## § 1. Преобразование Габора

Пусть функция  $f \in L^2(\mathbb{R})$  и

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt \tag{1.1}$$

ее преобразование Фурье.

Преобразование Фурье дает частотную информацию, содержащуюся в сигнале, то есть говорит нам о том, каково содержание каждой частоты в сигнале. Интеграл берется от минус бесконечности до плюс бесконечности, по всей временной оси. Поэтому в какой момент времени возникла та или другая частота, когда она закончилась – на эти вопросы ответ получить не удастся. Для преобразования Фурье равнозначно, присутствует ли какая-нибудь частота на протяжении всего исследуемого сигнала или возникла в определенный момент времени, ее вклад все равно будет одинаковым.

Для иллюстрации этого явления приведем графики дискретного преобразования Фурье для двух функций:

$$f_1(t) = \begin{cases} (\sin(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_1 t))/1000, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ (\sin(2\pi\nu_2 t) + \cos(2\pi\nu_2 t))/1000, & t \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}, \tag{1.2}$$

$$f_2(t) = (\sin(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_1 t) + \sin(2\pi\nu_2 t) + \cos(2\pi\nu_2 t))/2000.$$

Заметим, что любой сигнал с периодом  $N$  может быть представлен в виде суммы дискретных синусоидальных волн (см. [9], п. 3.3.2). Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)  $f$  есть

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right) \tag{1.3}$$

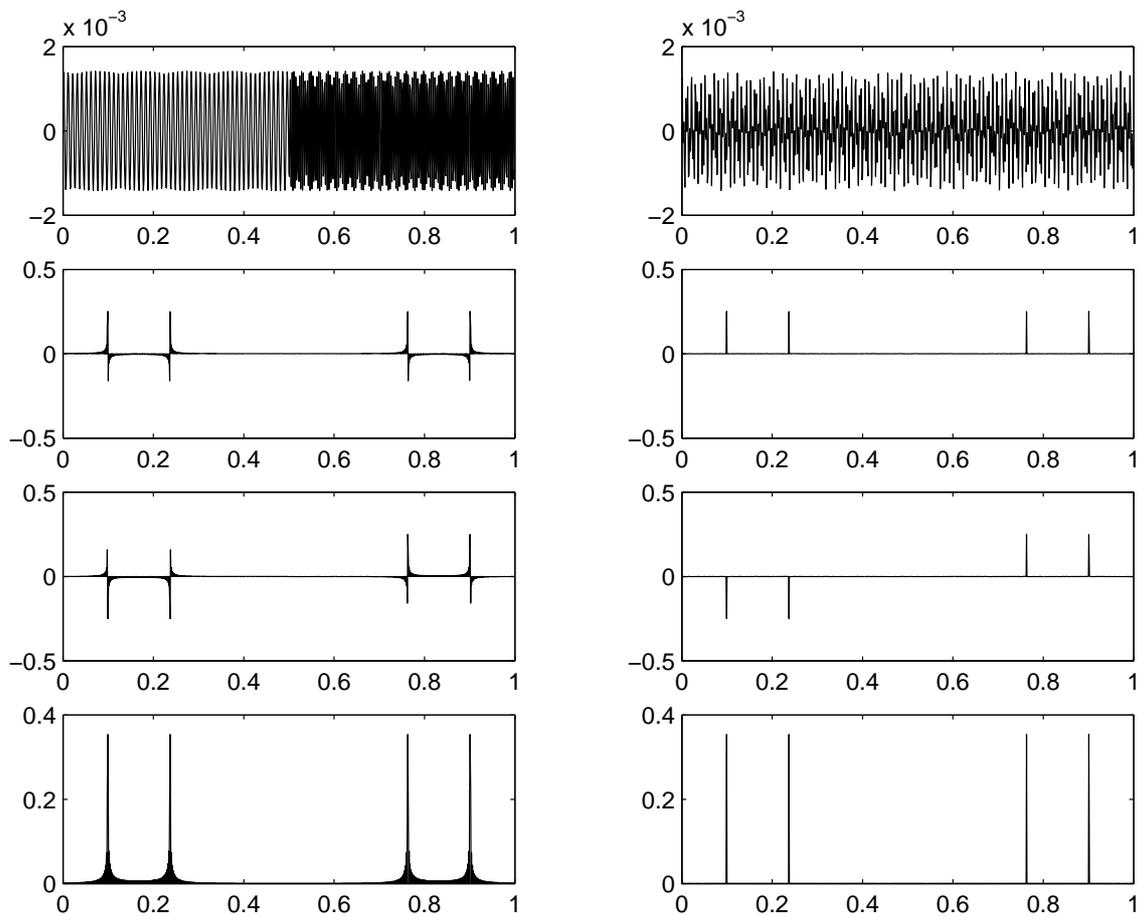


Рис. 1: Преобразование Фурье

На рис. 1 первая колонка соответствует  $f_1$ , вторая –  $f_2$ ,  $\nu_1 = 99$ ,  $\nu_2 = 237$ . В первой строке – графики исходных функций, во второй – действительные части дискретного преобразования Фурье этих функций, в третьей – мнимые, в четвертой – абсолютные величины. У первой функции частотные характеристики меняются по времени  $t$  (они различны на первой и второй половинах отрезка  $[0, 1]$ ), а у второй – нет. Однако их преобразования Фурье (особенно абсолютные величины) похожи.

В связи с вышесказанным отметим, что преобразование Фурье непригодно для анализа нестационарных сигналов, за одним исключением, когда нас интересует лишь частотная информация, а время существования спектральных составляющих неважно.