МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.Н. Гудович,
Н.Н. Гудович

ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Выпуск 1

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

§ 1. Понятие интерполяционного многочлена

Термин «интерполяция» имеет латинское происхождение. Латинское слово *interpolatio* образовано с помощью приставки *inter* (между, внутри) и глагола *polire* (восстанавливать, ремонтировать) и потому означает восстановление фрагмента массива данных по предыдущему и последующему фрагментам. Например, интерполяция в летописи – это восстановление утраченного фрагмента летописи на основе анализа предшествующего и последующего текста.

В математике под *задачей интерполяции* первоначально понимали восстановление значения функции в точке, расположенной между заданными точками $a,\ b$, по известным значениям $f(a),\ f(b)$ функции в этих точках.

Пусть

$$x_0=a,\ \ x_1=b \tag{1}$$

– заданные точки,

$$f(x_0)=f(a),\ \ f(x_1)=f(b) \tag{2}$$

– заданные значения функции в этих точках, а x^* – внутренняя точка отрезка $[a,\ b]$.

Для приближенного решения задачи интерполяции рассмотрим многочлен первой степени

$$p_1(x)=a_0+a_1\,x \tag{3}$$

и подберем его коэффициенты $a_0,\ a_1$ так, чтобы в точках $x_0,\ x_1$ этот многочлен принимал те же значения, что и функция f, т.е. подберем из условий

$$a_0+a_1\,x_0=f(x_0),\quad a_0+a_1\,x_1=f(x_1). \tag{4}$$

Решая систему (4) относительно неизвестных $a_0,\ a_1$, подставляя полученные значения этих коэффициентов в выражение для многочлена p_1 и вычисляя значение $p_1(x^*)$, получим число, которое и принимается в качестве приближенного значения функции f в интересующей нас внутренней точке x^*:

$$f(x^*) \cong p_1(x^*).$$

Описанный прием нахождения приближенных значений функции называют *линейной интерполяцией*, поскольку в качестве этих приближений здесь используются значения многочлена (3) первой степени, т.е. значения линейной функции. При этом сам многочлен (3) называют *интерполяционным многочленом* первой степени, построенным по значениям (2) функции f в *узлах интерполяции* (1).

Мы ознакомились с понятием интерполяции на простых частных случаях. Рассмотрим теперь общую ситуацию.

Пусть f – заданная на отрезке $[\,a\,,\,b\,]$ функция, а

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_n \tag{11}$$

– попарно различные точки этого отрезка.

<u>Определение 2</u>. *Интерполяционным многочленом степени не выше n* (обозначение $p_n\ (x;\ \{x_i\}_{i=0,\ \ldots\ ,\ n};\ f)$) называют многочлен вида

$$p(\,x\,) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\ , \tag{12}$$

значения которого в точках (11) совпадают со значениями функции f:

$$p_n\ (\,x_k\ ;\ \{\ x_i\ \}_{i=0,\ \ldots\ ,\ n}\ ;\ f\,) = f\,(x_k),\quad k = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n; \tag{13}$$

при этом точки (11) называют *<u>узлами интерполяции</u>*, а функцию f – *<u>интерполируемой функцией</u>*.

<u>Замечание 3</u>. Многочлен $p_n(\,x;\ \{x_i\},\ f\,)$ как функция переменной x зависит, во-первых, от функции f и, во-вторых, от выбора узлов интерполяции (11), что и отражено в обозначении. В том случае, когда ясно, о каком наборе узлов и какой функции идет речь, естественно использовать более простое обозначение: $p_n(x)$.

<u>Теорема 4</u>. Для любого набора (11) попарно различных узлов интерполяции на отрезке $[a,b]$ и любой заданной на $[a,b]$ функции f интерполяционный многочлен $p_n(\,x;\ \{x_i\};\ f\,)$ существует и единственен.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (12), перепишем условия (13) в виде:

$$a_0 + a_1x_k + a_2(x_k)^2 + \ldots + a_m(x_k)^m + \ldots + a_n(x_k)^n = f(x_k),\quad k=0,1,\ \ldots\ ,n. \tag{14}$$

Если набор узлов (11) зафиксировать, то соотношения (14) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_m,\ \ldots\ ,\ a_n$ интерполяционного многочлена $p_n(x;\ \{x_i\},\ f\,)$, и потому вопрос о существовании и единственности этого многочлена эквивалентен вопросу об однозначной разрешимости этой системы при любых правых частях

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots\ ,\ f(x_k),\ \ldots\ ,\ f(x_n)\,. \tag{15}$$

Матрица системы (14) имеет специальный вид: её m-тый ($m=0,1,\ \ldots\ ,n$) столбец составлен из m-тых степеней чисел (11). Матрицы такого типа в ал-

ŋqdqʎɐʎ bɆ dəqƎbʎɜə d ɛɔɑɓɔʎ ɜqdqʎqʎè

гебре называют матрицами *Вандермонда*; для построения матрицы B этого класса выбирают (не обязательно различные) числа

$$b_0,\, b_1,\, \ldots\, ,\, b_k,\, \ldots\, ,\, b_n, \tag{16}$$

возводят их в m-тую степень и полученный упорядоченный набор чисел

$$(b_0)^m,\, (b_1)^m,\, \ldots\, ,\, (b_k)^m,\, \ldots\, ,\, (b_n)^m$$

записывают в виде m-того столбца матрицы B. Известен способ вычисления определителя такой матрицы: сначала следует образовать всевозможные разности

$$b_i - b_j \quad , \quad i>j \tag{17}$$

чисел (16), а затем их перемножить:

$$det\, B = \prod_{i>j} (b_i - b_j\,). \tag{18}$$

В нашем случае роль чисел (16) играют числа (11): $b_k=x_k$, $k=0,1, \ldots ,n$. В силу предположения о том, что узлы интерполяции – попарно различные точки отрезка $[a,b]$, разности (17), а значит, и их произведение (18) – определитель системы (14) – отличны от нуля. Но тогда система однозначно разрешима при любых правых частях (15), что и гарантирует существование и единственность интерполяционного многочлена.

Замечание 5. Проведенные рассуждения указывают и способ построения интерполяционного многочлена: по заданным узлам интерполяции (11) и значениям (15) интерполируемой функции составляем систему (14), решаем её относительно $a_0, a_1, \ldots , a_n$ и подставляем полученные a_i в (12). Такой способ построения $p_n(x)$ называют *методом неопределённых коэффициентов*.

Замечание 6. Если в результате решения системы (14) для старших коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots , a_{n-r}$ будут получены нулевые значения, то фактическая степень интерполяционного многочлена окажется строго меньше n (по этой причине в определении 2 мы говорим о многочлене степени не выше n, а не о многочлене n-ой степени).

Замечание 7. Укажем, что в определении 2 и теореме 4 не предполагается, что крайние точки набора узлов (11) совпадают с концами отрезка $[a, b]$, а точки (11) занумерованы в порядке возрастания. Считается лишь, что узлы интерполяции – попарно различные точки отрезка $[a, b]$, в которых известны значения функции f. Выбор набора узлов влияет на коэффициенты интерполяционного многочлена, поскольку узлы интерполяции входят в матрицу системы (14). Что же касается нумерации узлов в пределах выбранного набора узлов интерполяции, то она не существенна, так как перенумерация узлов соответствует перестановке уравнений системы, что, очевидно, не влияет на решение.

§ 2. Погрешность интерполяции

Изучим теперь вопрос о погрешности интерполяционного многочлена.

Определение 8. *Погрешностью интерполяционного многочлена в точке* $x \in [a,b]$ *(или погрешностью интерполяции в точке* x *)* называется величина

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x), \tag{19}$$

т.е. разность значений функции и многочлена в точке x.

Исследование вопроса о погрешности начнем с рассмотрения частного случая.

Упражнение 9. Пусть функция f есть многочлен *2-ой* степени. Вывести формулу для погрешности линейной интерполяции.

Решение. В данном случае $n=1$, так что имеем два узла интерполяции x_0, x_1. При $n=1$ погрешность интерполяции (19) есть разность многочлена второй степени f и многочлена первой степени p_1. Поэтому она является многочленом второй степени. Известны корни этого многочлена – ими являются узлы интерполяции. Следовательно, для погрешности интерполяции справедливо представление:

$$f(x)-p_1(x)=K(x-x_0)(x-x_1), \tag{20}$$

где K – некоторая константа. Для ее нахождения дважды дифференцируем полученное равенство (20). Тогда, поскольку вторая производная от многочлена первой степени p_1 равна нулю, а вторая производная от правой части

$$K\,(x-x_0)(x-x_1)=K(x^2-(x_0+x_1)x+x_0\,x_1) \tag{21}$$

равенства (20) равна, очевидно, $K(2!)$, приходим к соотношению

$$f''(x)=(2!)K. \tag{22}$$

Вычисляя отсюда K и подставляя результат в (20), получим для погрешности интерполяции выражение

$$f(x)-p_1(x)=(1/2!)\,f''(x)(x-x_0)(x-x_1). \tag{23}$$

ђqdqyeY bЕ deрЕbYзe d eaαbcy ЗqdqYqyè

Усложним задачу, заменив предположение о том, что приближаемая функция f есть многочлен степени 2, более общим предположением о существовании у этой функции непрерывных производных до второго порядка включительно.

Теорема 10. Пусть $f \in C^2[a,\ b]$, Тогда для погрешности линейной интерполяции в любой точке x отрезка $[a,\ b]$, отличной от узлов интерполяции, справедлива формула

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1), \tag{24}$$

где $\xi\ (x)$ – точка, принадлежащая наименьшему отрезку вещественной оси, содержащему точку x и узлы интерполяции:

$$\xi(x) \in [\ min\{x,\ x_0,\ x_1\},\ max\{x,\ x_0,\ x_1\}\ ] \subseteq [a,b]. \tag{25}$$

Доказательство. При проведении доказательства нам придется различать точку x^*, в которой оценивается погрешность интерполяции, и переменную x, по которой будут дифференцироваться функции.

Итак, зафиксируем отличную от узлов интерполяции точку x^* и по аналогии с (20) подберем константу K^* так, чтобы выполнялось равенство

$$f(x^*) - p_1(x^*) = K^*(x^* - x_0)(x^* - x_1). \tag{26}$$

Для этого, очевидно, следует взять в качестве константы K^* величину

$$K^* = (\ f(x^*) - p_1(x^*)\ )\ /\ (x^* - x_0)(x^* - x_1)$$

Отметим, что отличие формул (20) и (26) состоит в том, что константа K в формуле (20) (случай многочлена степени 2) – одна и та же для всех x, тогда как константа в формуле (26) (случай дважды непрерывно дифференцируемой функции) зависит от выбора точки x^*, что и отражено в обозначении этой константы.

Составим теперь вспомогательную функцию переменной x

$$h(x) = f(x) - p_1(x) - K^*(x - x_0)(x - x_1)\ . \tag{27}$$

Равенство (26) означает, что в точке x^* функция (27) обращается в ноль. Кроме того, она равна нулю и в узлах интерполяции $x_0,\ x_1$, поскольку при подстановке в формулу (27) вместо x узла интерполяции третье слагаемое в правой части этой формулы обратится в ноль, а разность $f - p_1$ окажется равной нулю в силу совпадения в узле интерполяции значения функции и интерполяционного многочлена. Переобозначим эти три корня функции h

ђqdqаyеҮ bЁ dəqЁbҮзе d εэаqсу Эqdqҹqуè

символами $y_i^{(0)}$, $i=0,\ 1,\ 2$, чтобы получить упорядоченный по возрастанию набор корней

$$y_0^{(0)} < y_1^{(0)} < y_2^{(0)}. \tag{28}$$

Например, если $x^*<x_0<x_1$, то нумерация такова: $y_0^{(0)}=x^*$, $y_1^{(1)}=x_0$, $y_2^{(0)}=x_1$. В случае же $x_0<x^*<x_1$ имеем нумерацию: $y_0^{(0)}=x_0$, $y_1^{(0)}=x^*$, $y_2^{(0)}=x_1$, и т.д.

Поясним, что нижний индекс в обозначении $y_i^{(0)}$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ есть номер корня (ввиду специфики задачи нумеровать точки естественно от нуля), а верхний индекс напоминает, что речь идет о корнях самой функции h, т.е. о корнях ее производной нулевого порядка.

Отметим, что левая из точек (28) есть левый конец подотрезка

$$[\ min\{x^*, x_0, x_1\}\ ,\ max\{x^*, x_0, x_1\}\ ] \tag{29}$$

отрезка $[a,b]$, а правая есть правый конец этого подотрезка. Поэтому отрезок $[y_0^{(0)}, y_2^{(0)}]$ в точности совпадает с отрезком (29), а, значит, все внутренние точки отрезка $[y_0^{(0)}, y_2^{(0)}]$, которые будут далее выбираться, будут внутренними точками отрезка (29).

Обратимся теперь к средней из точек (28). Эта точка разбивает отрезок $[y_0^{(0)}, y_2^{(0)}]$ на подотрезки $[y_0^{(0)}, y_1^{(0)}]$, $[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]$, на концах которых функция h принимает нулевые значения. Но тогда по теореме Ролля *внутри* этих подотрезков находятся корни первой производной функции h.

Обозначая через $y_0^{(1)}$ корень производной из левого подотрезка $[y_0^{(0)}, y_1^{(0)}]$, а через $y_1^{(1)}$ – из правого подотрезка $[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]$ (верхний индекс означает здесь, как и ранее, порядок производной, а нижние индексы есть номера корней), получим упорядоченный по возрастанию

$$y_0^{(1)}< y_1^{(1)}$$

набор корней первой производной функции h. Применяя теперь к функции h' на отрезке $[y_0^{(1)}, y_1^{(1)}]$ теорему Ролля, приходим к выводу о существовании внутри этого отрезка точки $y_0^{(2)}$,в которой равна нулю вторая производная функции h:

$$h''(y_0^{(2)}) = 0. \tag{30}$$

Заметим, что, поскольку сам отрезок (29) зависит, вообще говоря, от выбора точки x^*; его внутренняя точка $y_0^{(2)}$ также зависит от x^*; поэтому ее естественно обозначить через $\xi(x^*)$.