

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н.Н. Гудович

ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Выпуск 4

Кубические сплайны

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Содержание

1. Понятие сплайна.....	4
2. Кубические сплайны.....	6
3. Вторые производные кубического сплайна.....	10
4. Кубический сплайн с начальными условиями.....	18
5. Метод прогонки решения трехдиагональных систем.....	23
6. Пример численного алгоритма.....	31
7. Упражнения и задания.....	33
Библиографический список.....	35

счет увеличения которого стараются добиваться лучшего приближения функции, принимают число N частичных отрезков разбиения.

Замечание 1.3. Термин «сплайн» (spline) имеет техническое происхождение: этим словом английские чертежники-кораблестроители прошлых веков называли длинную гибкую рейку для вычерчивания деталей корпуса корабля в натуральную величину, то есть чертежный инструмент для проведения гладких кривых. В современной же математике под сплайном понимают функцию φ , которая локально (то есть на частичных отрезках разбиения) задается многочленами φ_i фиксированной степени n . При этом упомянутые многочлены считаются подобранными так, чтобы в любом внутреннем узле x_i производные соседних многочленов φ_i, φ_{i+1} до порядка m включительно совпадали. Такое условие на значения производных многочленов φ_i, φ_{i+1} в узле x_i приходится налагать, поскольку в этой точке определены оба этих многочлена, и каждый из них при отсутствии требований (1.3) мог бы иметь в указанном узле различные значения производных. Последнее же исключало бы принадлежность функции φ , составленной из таких многочленов, классу гладкости $C^m[a, b]$. Во всех же других точках x гладкость функции φ обеспечена автоматически, поскольку в таких точках эта функция совпадает лишь с одним из многочленов, а всякий многочлен обладает в этих точках непрерывными производными любого порядка.

2. Кубические сплайны

На практике чаще всего используют сплайны третьей степени ($n = 3$) второго порядка ($m = 2$). Такие сплайны называют *кубическими*, поскольку график такого сплайна составлен из отрезков графиков многочленов третьей степени, а графики многочленов третьей степени принято называть кубическими параболой. Выбор для m значения 2 объясняется в том числе и тем, что при движении обрабатывающего инструмента в станках с числовым программным управлением (ЧПУ) по дважды непрерывно дифференцируемой кривой удастся избежать ударных нагрузок, которые в силу 2-го закона Ньютона возникали бы в случае разрывов 2-й производной и которые могли бы привести к разрушению обрабатывающего

инструмента или обрабатываемой поверхности. Значение же $n = 3$ – минимальное значение, обеспечивающее существование интерполяционного сплайна класса $C^2[a, b]$ при любом наборе $\{f(x_i)\}$ значений функции f в узлах (1.1).

Локальные представления (1.2) для кубического сплайна имеют вид:

$$\varphi_i(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x + a_2^{(i)} x^2 + a_3^{(i)} x^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

поэтому для задания кубического сплайна следует задать $4N$ коэффициентов $a_j^{(i)}$ (каждый из многочленов (2.1) имеет 4 коэффициента, а всего таких многочленов N). Выбор этих коэффициентов должен быть подчинен условиям интерполяционности (1.4), которые для данного случая удобно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x_0 + a_2^{(1)} x_0^2 + a_3^{(1)} x_0^3 = f(x_0), \quad (2.2)$$

$$a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x_i + a_2^{(i)} x_i^2 + a_3^{(i)} x_i^3 = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.3)$$

$$a_0^{(i+1)} + a_1^{(i+1)} x_i + a_2^{(i+1)} x_i^2 + a_3^{(i+1)} x_i^3 = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

$$a_0^{(N)} + a_1^{(N)} x_N + a_2^{(N)} x_N^2 + a_3^{(N)} x_N^3 = f(x_N). \quad (2.5)$$

Заметим, что уравнение (2.3) получено приравниванием значения $\varphi_i(x_i)$ локального представителя φ_i во внутреннем узле x_i значению $f(x_i)$ приближаемой функции f , а уравнение (2.4) для того же значения i – приравниванием тому же значению $f(x_i)$ значения $\varphi_{i+1}(x_i)$ соседнего локального представителя φ_{i+1} в том же внутреннем узле x_i . Выписав эту пару уравнений, мы сразу убили двух зайцев: обеспечили выполнение условия гладкости (1.3) с $k = 0$ в любом внутреннем узле x_i (то есть обеспечили непрерывность сплайна φ на отрезке $[a, b]$) и одновременно обеспечили выполнение условия интерполяционности в любом внутреннем узле.

Выполнение условия интерполяционности в краевых узлах x_0, x_N обеспечивается соответственно уравнениями (2.2) и (2.5).

Выписанные выше уравнения (2.2)–(2.5) должны быть дополнены уравнениями, вытекающими из условий гладкости (1.3) с $k = 1$ и $k = 2$.

Для вывода этих уравнений дифференцируем представление (2.1) по переменной x . В результате для первой производной локального представителя φ_i получаем формулу

$$\varphi_i'(x) = a_1^{(i)} + 2a_2^{(i)}x + 3a_3^{(i)}x^2, \quad (2.6)$$

а заменяя здесь индекс i на $i+1$, и формулу

$$\varphi_{i+1}'(x) = a_1^{(i+1)} + 2a_2^{(i+1)}x + 3a_3^{(i+1)}x^2 \quad (2.7)$$

для первой производной соседнего локального представителя φ_{i+1} . Придавая затем в формулах (2.6), (2.7) переменной x значение x_i и приравнявая в соответствии с требованием (1.3) при k равном единице полученные значения $\varphi_i'(x_i)$, $\varphi_{i+1}'(x_i)$, приходим

к следующей группе уравнений

$$a_1^{(i)} + 2a_2^{(i)}x_i + 3a_3^{(i)}x_i^2 = a_1^{(i+1)} + 2a_2^{(i+1)}x_i + 3a_3^{(i+1)}x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.8)$$

которая должна быть добавлена к системе (2.2) – (2.5).

Далее дифференцированием равенств (2.6), (2.7) получаем формулы

$$\varphi_i''(x) = 2a_2^{(i)} + 6a_3^{(i)}x, \quad (2.9)$$

$$\varphi_{i+1}''(x) = 2a_2^{(i+1)} + 6a_3^{(i+1)}x \quad (2.10)$$

для вторых производных соседних локальных представителей φ_i , φ_{i+1} . Придавая в формулах (2.9), (2.10) переменной x значение x_i и приравнявая получившиеся при этом значения вторых производных, приходим к еще одной группе уравнений

$$2a_2^{(i)} + 6a_3^{(i)}x_i = 2a_2^{(i+1)} + 6a_3^{(i+1)}x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.11)$$

которые также должны быть добавлены к уравнениям (2.2) – (2.5).

Уравнения (2.11) обеспечивают выполнения условия гладкости (1.3) при значении k равном двум.

Система (2.2)–(2.5), (2.8), (2.11) есть система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_j^{(i)}$. Число неизвестных в этой системе равно $4N$, а всего этих уравнений $4N-2$. Для получения замкнутой системы уравнений (то есть системы с числом

уравнений, равным числу неизвестных) не хватает двух уравнений. Эти уравнения получаются из двух дополнительных условий, которые задаются на концах отрезка $[a, b]$ и потому называются *краевыми условиями*. Например, можно задать значения γ и δ вторых производных сплайна в узлах x_0, x_N соответственно. В этом случае с учетом формулы (2.9) получим следующую пару дополнительных уравнений:

$$2a_2^{(1)} + 6a_3^{(1)} x_0 = \gamma, \quad 2a_2^{(N)} + 6a_3^{(N)} x_N = \delta. \quad (2.12)$$

Другая возможность получить пару дополнительных уравнений – это задать в указанных узлах значения не вторых производных сплайна, а значения μ, η его первых производных. В силу формулы (2.6) тогда получится другая пара дополнительных уравнений.

$$a_1^{(1)} + 2a_2^{(1)} x_0 + 3a_3^{(1)} x_0^2 = \mu, \quad a_1^{(N)} + 2a_2^{(N)} x_N + 3a_3^{(N)} x_N^2 = \eta. \quad (2.13)$$

Замечание 2.1. Если в формуле (2.12) положить $\gamma = \delta = 0$, то получим сплайн, который называют *естественным кубическим сплайном*. Дело в том, что условия (2.12) являются математическим аналогом ситуации, когда в точках плоскости $(x_0, f(x_0)), (x_N, f(x_N))$ гибкая рейка («физический сплайн») закреплена шарнирно, то есть может свободно поворачиваться вокруг этих точек. В этом случае концы рейки, расположенные соответственно левее и правее геометрических прямых на плоскости, параллельных оси ou и проходящих через точки с абсциссами x_0, x_N , займут естественное в данной ситуации прямолинейное положение, а значит, функция $\phi(x)$, описывающая кривую, по которой изогнется рейка, проходящая через точки $(x_i, f(x_i))$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), вне отрезка $[a, b]$ будет совпадать с многочленами первой степени. А так как вторые производные многочленов первой степени равны нулю, то вне отрезка $[a, b]$ будет иметь место равенство $\phi''(x) \equiv 0$. По непрерывности нулевые значения вторых производных перейдут и в точки x_0, x_N .

Замечание 2.2. Сплайн с дополнительными условиями (2.13) называют *сплайном с жестко заданными концами*. Физически это соответствует тому, что концы рейки, расположенные левее и правее упомянутых выше геометрических прямых, жёстко закреплены на плоскости oxu вдоль некоторых геометрических прямых, образующих с

осью ox заданные углы (параметры μ и η в уравнениях (2.13) есть тангенсы этих углов).

Замечание 2.3. Выбор коэффициентов $a_j^{(i)}$ в качестве неизвестных при построении кубических сплайнов, естественный и наглядный с теоретической и методической точек зрения, на практике оказывается не рациональным, поскольку при выборе в качестве параметров других характеристик сплайна, а именно значений

$$s_i = \varphi''(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.14)$$

вторых производных сплайна в узлах x_i , задача построения интерполяционного кубического сплайна после простых аналитических преобразований сведётся к решению линейной системы с существенно меньшим количеством неизвестных и более простой матрицей.

3. Вторые производные кубического сплайна

Обозначим через h_i длину i -го отрезка разбиения

$$h_i = x_i - x_{i-1}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим набор чисел

$$s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, \dots, s_N \quad (3.2)$$

и набор значений функции f

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{i-1}), f(x_i), \dots, f(x_N). \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Для любых $f(x_{i-1}), f(x_i), s_{i-1}, s_i$ из наборов (3.2), (3.3) найдется единственный многочлен степени не выше третьей, значения которого в точках x_{i-1}, x_i совпадают соответственно с $f(x_{i-1}), f(x_i)$, а значения второй производной которого в этих точках равны соответственно числам s_{i-1}, s_i .

Доказательство

Запишем многочлен степени не выше третьей в виде разложения

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.4)$$

по степеням независимой переменной x .