

УДК 514  
ББК 22.1  
А92

**Атанасян С. Л.**

**А92** Геометрия 2 : учебное пособие для вузов / С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков ; под ред. С. Л. Атанасяна. — 4-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 547 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-695-7

В учебнике собран материал второй части единого курса геометрии, изучение которого необходимо будущему учителю математики для успешной работы со школьниками. Изложение теоретического материала проиллюстрировано типовыми примерами.

Для студентов, аспирантов и преподавателей математических факультетов вузов.

**УДК 514  
ББК 22.1**

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Геометрия 2 : учебное пособие для вузов / С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков ; под ред. С. Л. Атанасяна. — 3-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 544 с. : ил. — ISBN 978-5-93208-326-0.

**В соответствии со ст.1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

ISBN 978-5-93208-695-7

© Лаборатория знаний, 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
<b>Часть I. Методы изображений</b>	
Глава I. Свойства изображений . . . . .	7
§ 1. Изображение плоских фигур при параллельном проектировании . . . . .	7
§ 2. Изображение многогранников при параллельном проектировании . . . . .	16
§ 3. Изображение цилиндра, конуса и шара . . . . .	23
Глава II. Построение изображений . . . . .	31
§ 4. Аксонометрия . . . . .	31
§ 5. Полные и неполные изображения. Сечения многогранников . . . . .	42
§ 6. Метрические задачи аксонометрии . . . . .	48
§ 7. Метод Монжа . . . . .	55
<b>Часть II. Основания геометрии</b>	
Глава I. Аксиоматика евклидова пространства . . . . .	65
§ 8. История попыток доказательства пятого постулата Евклида . . . . .	65
§ 9. Общие вопросы аксиоматики. Требования, предъявляемые к системам аксиом . . . . .	79
§ 10. Система аксиом Гильберта трехмерного евклидова пространства. Обзор следствий аксиом принадлежности и порядка . . . . .	90
§ 11. Обзор следствий аксиом конгруэнтности, непрерывности и параллельности . . . . .	98
§ 12. Аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства . . . . .	107
§ 13. Свойства прямых и плоскостей в аксиоматике Вейля трехмерного евклидова пространства . . . . .	113
§ 14. Свойства понятия «лежать между» в аксиоматике Вейля. Свойства отрезков, лучей полуплоскостей и углов . . . . .	120
§ 15. Равенство отрезков и углов в аксиоматике Вейля. Аксиомы непрерывности . . . . .	131
Глава II. Аксиома параллельности и утверждения, ей эквивалентные . . . . .	140
§ 16. Эквивалентность пятого постулата Евклида и утверждения Фаркаша Бойяи аксиоме параллельности евклидовой геометрии . . . . .	140

§ 17. Теоремы Лежандра . . . . .	145
§ 18. Эквивалентность аксиомы параллельности евклидовой плоскости теореме о сумме углов треугольника, постулату Валлиса и предложению Лежандра . . . . .	151
§ 19. Свойства четырехугольника Саккери. Предложение Посидония . . . . .	158
<b>Глава III. Геометрия Лобачевского . . . . .</b>	<b>164</b>
§ 20. Аксиоматика пространства Лобачевского. Основные следствия . . . . .	164
§ 21. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского . . . . .	169
§ 22. Угол параллельности, функция Лобачевского . . . . .	182
§ 23. Свойства прямых на плоскости Лобачевского . . . . .	189
§ 24. Пучки прямых на плоскости Лобачевского, траектории пучков . . . . .	196
§ 25. Модель Кэли–Клейна планиметрии Лобачевского . . . . .	208
<b>Глава IV. Теория измерений . . . . .</b>	<b>224</b>
§ 26. Длина отрезка. Теоремы существования и единственности длины отрезка . . . . .	224
§ 27. Площадь многоугольника. Теоремы существования и единственности . . . . .	233
§ 28. Равновеликие и равноставленные многоугольники. Теорема Бойяи–Гервина. Объем многогранника . . . . .	246
<b>Часть III. Проективная геометрия</b>	
<b>Глава I. Проективная плоскость и ее основные свойства . . . . .</b>	<b>257</b>
§ 29. Центральное проектирование. История возникновения проективной геометрии . . . . .	257
§ 30. Аксиомы Вейля проективного пространства. Прямые на проективной плоскости и их свойства. Модели проективной плоскости . . . . .	264
§ 31. Координаты точек на проективных прямой и плоскости . . . . .	273
§ 32. Преобразования координат точек проективной плоскости. Уравнение прямой на проективной плоскости. Однородные и неоднородные координаты точек расширенной плоскости . . . . .	280
§ 33. Принцип двойственности. Теорема Дезарга . . . . .	290

<b>Глава II. Двойные отношения точек и прямых, проективные отображения и преобразования . . .</b>	<b>301</b>
§ 34. Двойные отношения точек на проективной прямой . . . . .	301
§ 35. Двойное отношение четырех прямых пучка и его свойства . . . . .	309
§ 36. Двойное отношение точек на расширенной плоскости. Гармонические четверки точек и прямых . . . . .	315
§ 37. Проективные отображения прямых и пучков . .	325
§ 38. Проективные преобразования плоскости . . . . .	335
<b>Глава III. Кривые второго порядка на проективной плоскости . . . . .</b>	<b>348</b>
§ 39. Линии второго порядка на проективной плоскости . . . . .	348
§ 40. Пересечение линии второго порядка с прямой, полюсы и поляры . . . . .	359
§ 41. Теоремы Штейнера, Паскаля и Брианшона . . .	374
<b>Глава IV. Проективные интерпретации аффинной и евклидовой геометрий и неевклидовой геометрии Лобачевского . . . . .</b>	<b>387</b>
§ 42. Проективная интерпретация аффинной геометрии . . . . .	387
§ 43. Линии второго порядка на проективной плоскости с фиксированной прямой . . . . .	397
§ 44. Проективная интерпретация евклидовой геометрии . . . . .	404
§ 45. Проективная интерпретация геометрии Лобачевского . . . . .	415

## **Часть IV. Элементы топологии и дифференциальной геометрии**

<b>Глава I. Топологические пространства и многообразия . . . . .</b>	<b>427</b>
§ 46. Топологические пространства . . . . .	427
§ 47. Операции над множествами в топологическом пространстве . . . . .	436
§ 48. Непрерывные отображения топологических пространств . . . . .	445
§ 49. Связные и компактные топологические пространства . . . . .	451
§ 50. Топологические многообразия . . . . .	464

<b>Глава II. Дифференциальная геометрия</b> . . . . .	<b>472</b>
§ 51. Векторная функция от одной и двух переменных . . . . .	472
§ 52. Гладкие подмногообразия в евклидовом пространстве. Понятия линии и поверхности . . . . .	477
§ 53. Касательная и длина дуги гладкой линии. Кривизна и кручение, натуральные уравнения линии . . . . .	485
§ 54. Касательная плоскость и нормаль поверхности. Первая квадратичная форма . . . . .	496
§ 55. Кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма . . . . .	507
§ 56. Главные кривизны. Полная и средняя кривизны поверхности . . . . .	514
§ 57. Внутренняя геометрия поверхности. Теорема Гаусса. Геодезическая кривизна . . . . .	522
§ 58. Изометричные поверхности. Изгибание поверхности . . . . .	533
<b>Литература</b> . . . . .	<b>539</b>