МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

Методы решения нелинейных дифференциальных уравнений

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель:

Ю.Б. Савченко

Воронеж

2014

1. МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В функциональном анализе имеются несколько направлений, связанных с различным обобщением на бесконечномерный случай понятия монотонной функции.

Теория монотонности оператора является одной из глав функционального анализа, которая получила глубокие и интересные приложения в теории уравнений с частными производными.

2. ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ.

2.1 Постановка задачи

Следующие ниже обозначения будут использоваться на протяжении всего пособия.

Через Ω будем обозначать область в пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $x = \{x_{1,\dots,}x_n\}$. Пусть Γ -граница Ω. Мы всегда будем считать, что граница Γ «достаточно регулярна»; по мере надобности предположения будут уточняться.

Будем обозначать через Q *цилиндр* в $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$:

$Q = \Omega \times]0,T[,\ T$ конечно, а через Σ его *боковую границу*

$$\Sigma = \Gamma \times]0,T[.$$

Первым примером нелинейного уравнения в частных производных, который мы рассмотрим, будет уравнение, возникающее в релятивистской квантовой механике (см. Шифф [1], Юргенс [1], Сигал [1], [2]). Ищется вещественная функция

$u = u(x,t),\ x \in \Omega,\ t \in]0,T[,$ являющаяся решением уравнения

Элементами $H^{-1}(\Omega)$ являются суммы производных первого порядка от функций из $L^2(\Omega)$.

По мере надобности мы будем напоминать основные свойства s – пространств Соболева, равно как и других пространств такого же типа, вводимых ниже. Что касается систематического изложения теории пространств $H^s(\Omega)$, то см. Лионс – Мадженес [1], гл. 1 •

Для изучения задачи (2.1), (2.2), (2.3) необходимо ввести пространство

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \tag{2.2.6}$$

где

$$p = \rho + 2 \tag{2.2.7}$$

Пространство V снабжается нормой

$$||v||_{H_0^1(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)} ,$$

Превращающей его в пространство Банаха.

В силу теорем вложения Соболева (Соболев [1]) иемеем

□ Вообще, через X' будем обозначать пространство, сопряжённое к X.

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ при } n \geq 3 \tag{2.2.8}$$

так что

$$V = H_0^1(\Omega) \text{ при } \rho \leq \frac{4}{n-2}$$

Нам понадобится.

Л е м м а 2.1. *Пространство V, определённое формулой (2.2.6), сепарабельно (т.е. в нём существует счётное всюду плотное множество).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, с помощью отображения $v \to \{v, \partial v / \partial x_1, \ldots, \partial v / \partial x_n\}$ пространство V можно отождествить с замкнутым подпространством в пространстве $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)$, которое сепарабельно и равномерно выпукло, так что счётное всюду плотное множество можно спроектировать на это подпространство •

Теперь нам надо вести пространства функций от x и t. Если $x, t \to \phi(x, t)$ – функция, определённая в Q, то положим

$$\phi(t) = \ll x \to \phi(x,t) \gg$$

и будем рассматривать ϕ как *функцию* (или *распределение*) от t *со значениями в пространстве функций* (или *распределений*) от x.

В общем случае, если X - банахово пространство, то обозначим через $L^p(0,T;X)$ пространство (классов) функций $t \to f(t):]0,t[\to X$, измеримых, принимающих значения из X и таких, что

$$\left(\int_0^T ||f(t)||_X^p \, dt\right)^{1/p} = ||f||_{L^p(0,T;X)} < \infty \qquad (2.2.9)$$

Очевидно, имеем

$$L^p\left(0,T; L^p(\Omega)\right) = L^p(Q) \ \bullet$$

Мы будем искать (и найдём) решение u задачи (2.1), (2.2), (2.3) в пространстве $L^\infty(0,T;V)$. Но тогда нам надо определить производную $\partial u / \partial t$ в этом пространстве. Сейчас мы определим её в более общем случае для $f \in L^p(0,T;X)$.

Обозначим через $\mathcal{D}'(0,T;X)$ пространство *распределений* на интервале $]0,T[$ со значениями в X, определённое как (см. Л. Шварц [2])

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0,T[); X) \qquad (2.2.10)$$

□ В общем случае через $\mathcal{L}(\Phi;\Psi)$ мы будем обозначать пространство линейных непрерывных отображений Φ в Ψ.

Если $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, то производная в смысле распределений определяется из равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\phi) = -f\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \forall\ \phi \in \mathcal{D}(]0,T[). \tag{2.2.11}$$

Каждому элементу $f \in L^p(0,T;X)$ можно сопоставить распределение (также обозначаемое через f) на $]0,T[$ со значениями в X по формуле

$$f(\phi) = \int_0^T f(t)\phi(t)\,dt \quad \phi \in \mathcal{D}(]0,T[),$$

где интеграл принимает значение в X; мы, кроме того, можем с помощью (2.2.11) определить $\partial f/\partial t$ как элемент $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Без труда проверяется

Л е м м а 2.2. *Если $f \in L^p(0,T;X)$ и $\partial f/\partial t \in L^p(0,T;X)$ $(1 \le p \le \infty)$, то f, после, быть может, изменения на множестве меры нуль (из отрезка $(0,T)$), будет непрерывным отображением $[0,T] \to X$.*

2.3 Теоремы существования и единственности

Мы возвращаемся к поставленной задаче о нахождении функции u, являющейся решением задачи

$$u'' - \Delta u + |u'|^{p-2}u' = f \text{ в } Q = \Omega \times]0,T[\quad (1 < p < \infty), \tag{2.3.1}$$

$$u = 0 \text{ на } \Sigma \tag{2.3.2}$$

$$u(x,o) = u_o(x), \quad u'(x,o) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{2.3.3}$$

Здесь ρ заменено на $\rho - 2$. Будет доказана

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что заданы такие f, u_o, u_1, что*

$$f \in L^2(Q) + L^{p'}(\Omega)\square, \tag{2.3.4}$$