

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЗАДАЧИ ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Практикум для вузов

Составители:
Б. Н. Воронков,
Т. А. Радченко

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Предисловие

Данный практикум содержит задачи по теории вероятностей и математической статистике, которые предлагались студентам факультета ПММ на государственном экзамене в 1998–2011 годах. Разбор и решение представленных задач может оказать студентам помощь в освоении курса теории вероятностей и математической статистики, а также может быть полезным при подготовке к выпускным экзаменам.

1. Задачи к экзамену на степень бакалавра, 1997/1998 уч. год

1. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2b}, & |x - a| \leq b, \\ 0, & |x - a| > b, \end{cases} \quad a, b = \text{const}.$$

Найти $F(x)$, $M\xi$, $P(\xi \geq M\xi)$.

2. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = C \cdot x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \quad x \geq 0, \quad a > 0.$$

Найти константу C и вероятности $P(\xi \geq a)$ и $P(\xi < a)$.

3. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = C \cdot |x^3|, \quad |x| \leq 1.$$

Найти константу C , $F(x)$, $P(|\xi| < 0,3)$.

4. Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = 1 - B \cdot \exp\left(-\frac{x}{T}\right), \quad x \geq 0.$$

Найти константу B , $M\xi$, $P(T \leq \xi < 2T)$.

5. Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,4, & -1 < x \leq 0, \\ 0,4 + p, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти константу p , $M\xi$, $M\eta$ и $D\eta$, где $\eta = |\xi| + 1$.

6. Производится испытание трех приборов. Вероятность отказа каждого из них $p = 0,1$. Отказ любого прибора не влияет на работоспособность

3. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,2, & -1 < x \leq 0, \\ 0,2 + p, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$M\xi = 0$. Найти константу p , $M\eta$ и $D\eta$, где $\eta = 2|\xi| - 1$.

4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ c \cdot (x - 1), & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Случайные величины γ и ϕ определены следующим образом: $\gamma = A\xi + B\eta$, $\phi = A\xi - B\eta$. Найти константу «с», $M\gamma$, $M\phi$ и коэффициент корреляции между случайными величинами γ и ϕ .

5. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами (a, σ^2) . Найти $M\eta$ и $P(\eta < b)$, если $\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot |\xi|$.

6. Методом моментов найти по выборке $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности, имеющей распределение Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

оценку параметра « θ ».

7. По выборке $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности, имеющей плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{(x-a)}{\theta}\right), \quad x \geq a,$$

найти оценку максимального правдоподобия параметра θ и проверить ее несмещенность.

8. В таблице приведены данные о фактическом сбыте товара (в условных единицах) в пяти районах.

| Район | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------|-----|-----|----|----|-----|
| Объем сбыта | 110 | 130 | 70 | 90 | 100 |

Согласуются ли эти данные с предположением, что объем сбыта в районах одинаков? Принять уровень значимости $\alpha = 0,01$.

9. При испытании аппаратуры фиксировалось число отказов у приборов. Результаты испытаний 60 приборов приведены в таблице.

| | | | | |
|----------------|----|----|---|---|
| Число отказов | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Число приборов | 43 | 10 | 4 | 3 |

Согласуются ли эти данные с предположением о пуассоновском законе распределения числа отказов? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

10. При 20 подбрасываниях двух монет фиксировалось число выпадений герба.

| | | | |
|----------------------------|---|---|---|
| Количество выпавших гербов | 0 | 1 | 2 |
| Число выпадений | 6 | 8 | 6 |

Согласуются ли эти результаты с предположением о симметричности монеты и независимости результатов отдельных подбрасываний? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

4. Задачи к госэкзамену, дневное отделение, 1998/1999 уч. год

1. Случайная величина $\eta = |\xi| - 1$. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^4, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Найти константу «a», $F(x)$, $M\eta$, $D\eta$.

2. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Случайная величина η равномерно распределена в интервале $[0, 2]$.

Найти $M\gamma$, $D\gamma$, если $\gamma = \xi + \eta - \xi\eta$.

3. Случайная величина $\eta = 4 + |\xi|$. Функция распределения случайной величины ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,3, & -1 < x \leq 0, \\ 0,5, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти $M\eta$, $D\eta$, $P(\eta \geq 5)$.

4. Случайная величина $\eta = 1 + 3\xi$, $M\xi = 1$, $D\xi = 2$. Вычислить $M\eta$, $D\eta$, $M(\xi\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta}$.

5. Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,1, & -1 < x \leq 0, \\ 0,1 + p, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$M\xi = 0$. Найти константу «р», $M\eta$ и $D\eta$, если $\eta = |\xi| + 2$.

6. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами ξ и η , если $D\xi = A$, $D\eta = B$, $D(\xi + \eta) = C$.

7. Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} A \cdot \exp(x), & x \leq 0, \\ 1 - A \cdot \exp(-x), & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, константу «А», $P(|\xi| < 2)$.

8. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, x \in \left[\frac{b-\gamma}{2}, \frac{b+\gamma}{2} \right], \\ 0, x \notin \left[\frac{b-\gamma}{2}, \frac{b+\gamma}{2} \right]. \end{cases}$$

Найти константу γ , функцию распределения $F(x)$, $M\xi$ и $D\xi$.

9. По выборке $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ из генеральной совокупности, распределенной по биномиальному закону с параметрами (k, p) , найти методом максимального правдоподобия и методом моментов оценку параметра «р».

10. По выборке $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ из генеральной совокупности, плотность распределения вероятностей которой $f(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{x}{\theta})$, $x \geq 0$, $\theta > 0$, найти методом максимального правдоподобия и методом моментов оценки параметра θ . Определить состоятельность найденных оценок.

11. Число выпадений герба при 20 подбрасываниях двух монет распределилось следующим образом.