

УДК 517.958: 531.327.13

## ОБРУШЕНИЕ ВОЛН ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ НАД ПРЕПЯТСТВИЕМ

В. Ю. Ляпидевский, Ж. Сюй\*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Институт физической океанографии Океанского университета Китая,  
266003 Чиньдао, Китай

E-mail: liapid@hydro.nsc.ru

В длинноволновом приближении изучаются течения однородной тяжелой жидкости над неровным дном. Предложена математическая модель, учитывающая как дисперсионные эффекты, так и формирование турбулентного верхнего слоя при обрушении поверхностных гравитационных волн. Исследовано асимптотическое поведение нелинейных возмущений на фронте волны и найдены условия перехода от гладких течений к обрушивающимся волнам при стационарном обтекании локального препятствия сверхкритическим потоком.

**Ключевые слова:** однородная жидкость, сверхкритическое течение, волны предельной амплитуды, обрушение волн.

**Введение.** Для описания волновых процессов в течениях однородной тяжелой жидкости со свободной поверхностью широко используются математические модели, соответствующие второму приближению теории мелкой воды (различные варианты уравнений Буссинеска [1], уравнения Грина — Нагди [2], уравнения Железняк — Пелиновского [3] и т. д.). Эти уравнения адекватно отражают структуру нелинейных волновых фронтов умеренной амплитуды. Однако в отличие от точной постановки задачи Коши — Пуассона в рамках второго приближения невозможно описать волны предельной амплитуды и получить критерии перехода от гладких волн к обрушивающимся. Процесс обрушения поверхностных волн в последнее десятилетие интенсивно исследуется экспериментально [4–6]. Показано, что при обрушении развивается приповерхностный турбулентный слой, который играет важную роль в формировании волнового фронта. Теоретические модели этого процесса построены только для развитых турбулентных боров [7–9].

В данной работе исследуется математическая модель, учитывающая влияние поверхностного турбулентного слоя на структуру стационарного течения в окрестности локального препятствия.

**1. Математическая модель.** Уравнения мелкой воды для несжимаемой жидкости с учетом поверхностного турбулентного слоя и негидростатичности распределения давления могут быть записаны в следующем виде (см. [10, гл. 6]):

$$\begin{aligned}h_t + (hu)_x &= -\sigma q, \\u_t + uu_x + g(h + \eta + z)_x + p_x &= 0, \\ \eta_t + (\eta v)_x &= \sigma q,\end{aligned}\tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 40276008) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-05-64460).

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + g(h + \eta + z)_x &= \sigma q(u - v)/\eta, \\ q_t + vq_x &= \sigma((u - v)^2 - (1 + \theta)q^2)/(2\eta). \end{aligned}$$

Здесь  $h, \eta$  — глубина нижнего (потенциального) и верхнего (турбулентного) слоев;  $u, v$  — соответствующие средние горизонтальные скорости в слоях;  $q$  — среднеквадратичная скорость мелкомасштабного движения в верхнем слое;  $g$  — ускорение свободного падения;  $z = z(x)$  — форма дна; коэффициенты  $\sigma$  и  $\theta$  постоянны.

Для замыкания модели нужно выбрать выражение для связанного с эффектами негидростатичности дополнительного давления  $p$  на дне канала. При  $p \equiv 0$  уравнения (1) представляют собой первое приближение теории мелкой воды с учетом обрушения поверхностных волн. Структура бегущих волн для этой модели исследована в [9, 10]. При  $p = p(h, \dot{h}, \ddot{h})$ ,  $\dot{h} = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$  получаем обобщение различных моделей, соответствующих второму приближению. Для описания стационарных течений со свободной поверхностью в окрестности локального препятствия используем следующее представление для избыточного давления:

$$p = u^2(2hh_{xx} - h_x^2 + 3k(z_x^2 + hz_{xx}))/6. \quad (2)$$

При  $k = 1$  зависимость (2) получена в [11], при  $k = 0$  — в [12]. Для стационарных течений система (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned} (hu)_x &= -\sigma q, & (\eta v)_x &= \sigma q, \\ uu_x + g(h + \eta + z)_x + (u^2(2hh_{xx} - h_x^2 + 3k(z_x^2 + hz_{xx})))_x/6 &= 0, \\ vv_x + g(h + \eta + z)_x &= \sigma q(u - v)/\eta, & vq_x &= \sigma((u - v)^2 - (1 + \theta)q^2)/(2\eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассматриваются гладкие решения (3), описывающие стационарные возмущения равномерного сверхкритического потока ( $h = h_0, u = u_0, Fr = u_0/\sqrt{gh_0} > 1$ ) при обтекании локального симметричного препятствия

$$z(x) = z(-x), \quad z(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > l. \quad (4)$$

Предполагается, что на достаточно большом расстоянии от препятствия вверх по потоку течение не возмущено, т. е.

$$h \rightarrow h_0, \quad u \rightarrow u_0, \quad \eta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (5)$$

Требуется найти возможные волновые конфигурации, локализованные в окрестности препятствия. Рассмотрим сначала решение этой проблемы в рамках более простой модели в предположении о том, что поверхностный турбулентный слой отсутствует ( $\eta \equiv 0$ ).

**2. Уединенные волны над препятствием.** При  $\eta \equiv 0$  система (3) редуцируется к модели, полученной в [11]:

$$\begin{aligned} hu &= Q \equiv \text{const}, \\ u^2/2 + g(h + z) + u^2(2hh_{xx} - h_x^2 + 3k(z_x^2 + hz_{xx}))/6 &= J = \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

В работе [11] уравнения (6) использовались для построения транскритических режимов течения над препятствием ( $Fr < 1$ ).

При  $Fr > 1$  локализованные в окрестности препятствия течения задаются решениями уравнений (6), удовлетворяющими условиям (5) и симметричными относительно начала координат. Такие решения могут быть получены возмущением двух типов течений над ровным дном: равномерного течения и уединенной волны. Поэтому в определенном диапазоне чисел Фруда  $Fr > 1$  в окрестности препятствия могут быть реализованы два различных течения.

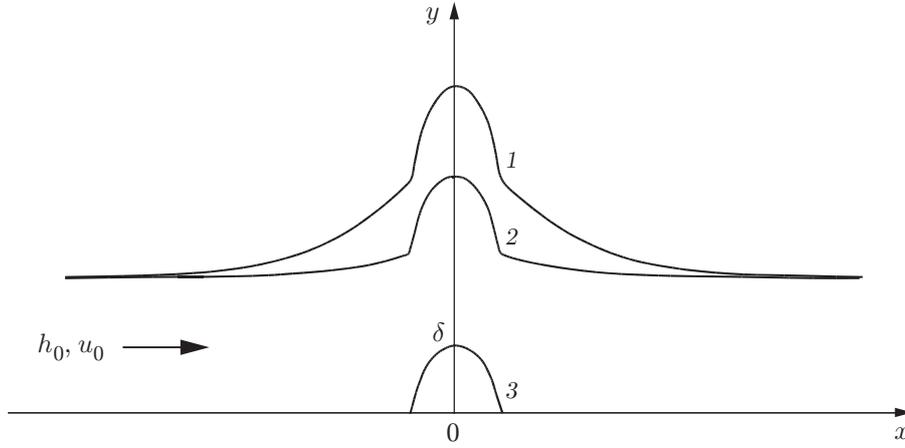


Рис. 1. Сверхкритическое обтекание препятствия (модель (6),  $\text{Fr} = 1,5$ ,  $\sigma = 0,15$ ,  $\delta = 0,5h_0$ ,  $k = 0$ ):

1 — возмущение уединенной волны; 2 — возмущение равномерного течения; 3 — препятствие (полуцилиндр радиуса  $R = 0,5h_0$ )

Так как течение вне препятствия (при  $|x| > l$ ) представляет собой часть солитона, форма которого может быть найдена интегрированием уравнений при  $z = 0$ , то (6) редуцируется к одному уравнению первого порядка

$$h_x^2 = \frac{3}{\text{Fr}^2 h_0^3} (h - h_0)^2 (\text{Fr}^2 h_0 - h), \quad (7)$$

решение которого представляется в квадратурах. Заметим, что в (7) использованы условия (5), т. е.

$$Q = h_0 u_0, \quad J = (\text{Fr}^2/2 + 1)gh_0.$$

Таким образом, проблема отыскания симметричных течений в окрестности локального препятствия сводится к построению решений (6) на интервале  $(-l, 0)$  со следующими краевыми условиями:

$$h_x|_{x=-l} = \left( \frac{3(\text{Fr}^2 h_0 - h)}{\text{Fr}^2 h_0^3} \right)^{1/2} (h - h_0), \quad h_x|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (6), (8) может быть найдено численно при заданной форме препятствия. Для гладких препятствий простой формы можно показать, что существует критическое значение  $\text{Fr}_* > 1$  такое, что при  $\text{Fr} > \text{Fr}_*$  задача (6), (8) имеет два решения, причем при увеличении числа Фруда амплитуда волны, соответствующей возмущенному солитону, неограниченно возрастает [13, 14].

На рис. 1 представлены профили симметричных волн при сверхкритическом обтекании локального препятствия (полуцилиндра), полученные возмущением уединенной волны (кривая 1) и равномерного потока (кривая 2) в рамках модели (6) при  $k = 0$ . В отличие от точной постановки задачи Коши — Пуассона [13] различные модификации уравнений мелкой воды над неровным дном (второе приближение), включая уравнения Кортевега — де Фриза [14, 15], не имеют ограничений на амплитуду волны и, следовательно, не дают критерия перехода от гладких волн к обрушивающимся. В п. 3 показано, что использование модели (3), учитывающей формирование поверхностного турбулентного слоя, позволяет не только определить волны предельной амплитуды, но и описать процесс обрушения волны и развития турбулентного бора.