УДК 517.957
ББК 22.161.6
Р 33

*Рецензенты:*
д-р физ.-мат. наук, доцент **Р. Г. Закинян,**
д-р физ.-мат. наук, профессор **Ю. И. Сапронова**
(ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный универстет»)

**Редькина Т. В.**
Р 33 **Комплексификация иерархии уравнения Кортевега – де Вриза**: монография. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2015. – 167 с.

ISBN 978-5-9296-0736-3

Монография посвящена теории нелинейных уравнений в частных производных для действительных и комплексных функций, обладающих операторной структурой. Найдена комплексификация иерархии уравнения Кортевега – де Вриза и иерархия возмущенного уравнения Кортевега – де Вриза с оператором рассеяния четвертого порядка. Исследованы интегрируемые случаи полученных уравнений. Построены точные решения методами солитонной математики.

Адресована научным работникам, математикам, специалистам в области нелинейных уравнений, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.

УДК 517.957
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-9296-0736-3



ŋqdqꓯeꓬ bƎ dәdƎbꓬзә b ɐɔɑbɔꓯ Ɉqdqꓬqꓯè

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Проблема интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными практически всегда решается индивидуально для каждого уравнения отдельно, и ответить положительно или отрицательно на этот вопрос чаще всего невозможно. Если же идти в противоположном направлении, т. е. использовать некоторые структуры, которые заведомо определяют пути интегрирования, то можно получать сразу интегрируемые модели. Такими операторными структурами является уравнение Лакса, или уравнение нулевой кривизны, тесно связанное с алгоритмом решения – методом обратной задачи рассеяния. Применение метода обратной задачи рассеяния возможно только к специально выбранным операторам, и, следовательно, она применима к весьма небольшому числу нелинейных уравнений. Но структура операторного уравнения Лакса такова, что порождаемые ею нелинейные уравнения обладают специфическими – солитонными – свойствами:

- наличие бесконечного числа законов сохранения и симметрий;
- применение метода Хироты и связь с $\tau$ -функцией;
- свойство Пенлеве;
- связь с линейной задачей на собственные значения и применимость метода обратной задачи рассеяния;
- возможность построения большого числа точных решений в виде бегущих волн, автомодельные решения и др.;
- связь с другими уравнениями с частными производными с помощью преобразований Беклунда;
- наличие гамильтоновой структуры…

Прослеживается четкая связь между этими свойствами и наличием у уравнения пары Лакса.

Возникает естественный вопрос, как можно расширить класс интегрируемых уравнений, у которых будут сохраняться хотя бы некоторые свойства, присущие солитонным уравнениям. Перечислим некоторые возможности.

Большинство известных уравнений, обладающих операторными структурами, связаны с самосопряженным оператором Шредингера



ŋqdqɏəɎ bɆ dədɆbɎзə d ɐɔɐqɔɏ Ɉqddɏqɏè

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$$

или его модификациями. Имеются многие интересные результаты, полученные при рассмотрении других операторов рассеяния, – уравнение трехволнового взаимодействия [82], построение комплексификаций, с эрмитовосопряженными операторами более высокого порядка, например четвертого [38–41] и др.

Перечислим некоторые возможности расширения класса интегрируемых уравнений в рамках солитонной теории.

♦ Использование в качестве оператора рассеяния других самосопряженных линейных операторов.

В настоящей работе в качестве оператора рассеяния использован самосопряженный оператор четвертого порядка и эрмитовосопряженный оператор матричной структуры (глава I).

♦ Рассмотрение несамосопряженных операторов, удовлетворяющих уравнению Лакса, или уравнению нулевой кривизны [103].

Существенные результаты можно получить, если рассмотреть линейные дифференциальные операторы первого порядка, но с матричными коэффициентами. Порядок матриц определяет количество уравнений системы, поэтому при порядке матриц $n > 3$ могут получаться сильно переопределенные системы. Кроме этого, сведение систем уравнений к одному уравнению приводит к повышению порядка дифференциального уравнения. Большинство моделей, описывающих процессы реальных событий, имеют в основном второй и третий порядок, реже – более высокий, поэтому в качестве примера возможности построения новых интегрируемых структур использовались линейные дифференциальные операторы первого порядка с матричными коэффициентами 4 × 4.

♦ Использование других операторных структур, кроме операторных структур Лакса $L_t = [L, A]$ и уравнения нулевой кривизны $L_t - A_x + [L, A] = 0,$ .

Так, интересные операторные структуры предложены в работах О. И. Богоявленского [39–41]:

- $L_t = \left[L^k, A\right]$, $k \in N$ представимо в виде операторного уравнения Лакса вида $(L^k)_t = \left[L^k, AL + LA\right]$;

- уравнение $L_t L = [L, A]$ в случае обратимости оператора $L$ равносильно лаксовой структуре типа $L_t = [L, AL^{-1}]$, где $L^{-1}$ – обратный оператор, если же L необратим, то рассмотренное уравнение не эквивалентно уравнению Лакса и дает новую структуру.

Использование триад операторов L; A; B:

- в [56] рассматривается связь $L_t - [L, A] = BL$;
- в [41] предложено уравнение $L_t = LA + BL$ с кососимметрическими операторами A и B (когда выполняются равенства $A^T = -A,\ B^T = -B$, T – обозначает транспонирование), которое сводится к двум уравнениям Лакса
$$\left(LL^T\right)_t = \left[LL^T, -B\right],\ \left(L^T L\right)_t = \left[L^T L, A\right],$$
а при эрмитово-кососимметрических операторах A и B ($\bar{A}^T = -A,\ \bar{B}^T = -B$, черта обозначает комплексное сопряжение), оно эквивалентно системе
$$\left(L\bar{L}^T\right)_t = \left[L\bar{L}^T, -B\right],\ \left(\bar{L}^T L\right)_t = \left[\bar{L}^T L, A\right].$$

♦ Применение схемы построения интегрируемых уравнений, не приводимых к лаксовой форме.

Новая алгебраическая конструкция предложена О. И. Богоявленским [41]
$$L_t = P(L) + [L, A],$$
где $P(L)$ – многочлен или любая аналитическая функция с постоянными коэффициентами или инвариантами матрицы $L$. Существенной особенностью этих уравнений является наличие аттракторов в фазовом пространстве и нестандартное поведение их солитоноподобных решений.

♦ Изучение возможности распространения идей солитонной математики на нелинейные уравнения в частных производных, зависящих от функций большего, чем две, числа переменных.

На современном этапе вызывают большой интерес 2+1- и 3+1-мерные нелинейные модели, исследуемые в работах В. Э. Адлера, А. Б. Шабата «Модельное уравнение теории солитонов» [31] (рассмотрена иерархия интегрируемых 1+2-мерных уравнений, связанная с алгеброй Ли векторных полей на прямой); К. Р. Есмахановой «Солитонные решения 2+1-мерного нелинейного уравнения Шредингера» [63] (получены $N$-солитонные решения 2+1-мерного нелинейного уравнения Шредингера); С. В. Жесткова, В. С. Новошинской «О существовании солитонных решений систем связанных 2+1-мерных уравнений Шредингера с керровской нелинейностью и степенными законами нелинейности» [64] (развит прямой метод построения солитоноподобных решений); О. М. Киселева «Многомерные нелинейные интегрируемые уравнения: асимптотики решений и возмущения» (исследовал асимптотическое поведение при больших значениях времени убывающих по пространственным направлениям решений 2+1-мерных интегрируемых уравнений); О. Б. Сурневой (рассмотрено 2+1-мерное интегрируемое уравнение с несамосопряженным оператором рассеяния и методами солитонной математики; найдены точные решения [121–123]) и др. [44, 50, 127].

Значительное место в теории солитонов отводится комплекснозначным нелинейным уравнениям. Они встречаются в различных приложениях, поэтому их исследование также носит актуальный характер.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает целую совокупность явлений в физике волновых процессов: в квантовой механике [106]; в нелинейной оптике [27]; в теории волн на глубокой воде [17]; при описании переноса энергии вдоль α-спиралей белков [5; 15]; распространение определённого класса нелинейных волн в плазме и другие явления. Многие комплекснозначные нелинейные дифференциальные уравнения сводятся к НУШ.

Еще одним уравнением, принадлежащим данному классу, является комплексное уравнение Ландау – Гинзбурга [74, 115], имеющее разнообразные приложения в теории сверхпроводимости [35], динамике жидкости, химической кинетике.

В статье А. В. Борзых [42] для 3+1-мерного НУШ

$$i\psi_t = \psi_{xy} + \psi_{xz} + V\psi, \quad V_x = 2\left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right]|\psi|^2,$$

с начальным условием $\psi(x,y,z,t)_{t=0} = \psi_0(x,y,z)$ и граничным условием $\psi(x,y,z,t) \to 0$, $|x| \to \infty$, где $\psi = \psi(x,y,z,t)$ – комплекснозначная функция из пространства Шварца и $|\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ получено односолитонное решение методом Хироты.

В работе А. Б. Хасанова, А. А. Рейимберганова [128] с помощью МОЗР для оператора Дирака получено конечно плотное решение высшего НУШ с самосогласованным источником:

$$iu_t - 4\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} D_x^k(u\Omega_{m-k}) = 2\sum_{n=1}^{N}(\Phi_{1n}^{*2} - \Phi_{2n}^2),$$

$$L\Phi_n = \xi_n\Phi_n, \; n = 1, \; 2, \; \ldots, \; N$$

с начальным условием $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in R$, где $\Phi_n = (\Phi_{1n}, \Phi_{2n})^T$ – собственная вектор-функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\xi_n$, $n = 1,2,\ldots,N$.

Статья С. В. Сидорова [114] посвящена вопросам образования решений типа бегущей волны на примере уравнения Ландау – Гинзбурга для одномерного случая, соответствующего плоской волне

$$W_t(x,t) = aW(x,t) + dW_{xx}(x,t) - cW(x,t)W(x,t)^2,$$

где $W(x,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ – комплекснозначная функция, $a = a_1 + ia_2$, $d = d_1 + id_2$, $c = c_1 + ic_2$ – комплексные коэффициенты.

В работе И. А. Шишмарёва и М. Цуцуми [132] рассмотрена задача Коши для уравнения Ландау – Гинзбурга в одномерном и многомерном (по пространственной переменной) случае

$$u_t - (\alpha + i\beta)\Delta u + \lambda|u|^2 u + au = 0, \; u|_{t=0} = \bar{u}(x),$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$, $n \geq 1$, $t \geq 0$, $\alpha, \beta, a$ – действительные числа, $\lambda$ – комплексное число, $\Delta$ – оператор Лапласа, $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, построена асимптотика решения при $t \to \infty$.

В диссертации М. В. Комарова [76] для уравнения Ландау – Гинзбурга в $n$-мерном (по пространственной переменной) случае получена асимптотика классического решения периодической задачи:

$$\begin{cases} u_t + \lambda|u|^2 u + au - (\alpha + i\beta)\Delta u = 0, & t > 0, \; x \in \Omega \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Здесь $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $n \geq 1$, $\Omega$ – $n$-мерный куб с длиной ребра 2π, $\alpha, \beta, a$ – действительные числа, $\lambda$ – комплексное число. Решение $u(t,x)$ – комплекснозначная функция, 2π – периодическая по пространственным переменным, $\Delta$ – оператор Лапласа.

В работах О. В. Новиковой [89–94] изучено нелинейное комплекснозначное уравнение

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0,$$

обладающее парой Лакса с самосопряженным оператором рассеяния Дирака второго рода, использованы идеи солитонной математики для доказательства интегрируемости и получения точных решений.

Как видим, математическая теория солитонов имеет огромные перспективы в различных приложениях. С помощью солитонов можно описывать самые разные физические объекты – от элементарных частиц до черных дыр и рукавов галактик. Это относится к различным вопросам теории плазмы [45, 47, 55, 60, 77], нелинейной оптики [36, 75, 83–85, 113, 124, 129], теории гравитации [34, 54, 118, 133]. Изучаются солитоны в кристаллах [33, 57, 58, 72, 87, 88, 119], магнитных материалах [32, 43, 48, 81, 105, 126, 130, 131], сверхпроводниках [79], живых организмах, биологических системах [49, 51, 53, 78, 97, 120]. На основе солитонов можно разрабатывать новые приборы, обладающие рядом уникальных возможностей [117]. Одним из значительных направлений исследований в настоящее время также является применение солитонов для хранения и передачи информации [116, 125].

В настоящей работе рассмотрены уравнения, напрямую связанные с уравнением Кортевега – де Вриза (комплексификация иерархии уравнения КдВ и иерархии возмущения КдВ) и имеющие оператор рассеяния четвертого порядка. На примерах полученных нелинейных уравнений осуществляется попытка доказательства их интегрируемости, изучаются свойства, присущие уравнениям с солитонными решениями, и проводится их анализ.