

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. А. Краснов

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности Математика*

Ярославль 2011

УДК 517
ББК В15я73
К78

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензенты:

Тихомиров А. С., доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры ЯГПУ ;
кафедра высшей математики ЯГТУ

Краснов, В. А. Вещественный анализ на многообразиях:

К 78 учебное пособие / В. А. Краснов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. —
Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 164 с.
ISBN 978-5-8397-0817-4

В пособии излагаются дифференциальное и интегральное исчисления на многообразиях. В частности, доказывается формула Стокса для дифференциальных форм на многообразии, а также рассматриваются дифференциальные операторы в сечениях векторных расслоений.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальности 010101.65 Математика (дисциплина «Анализ на многообразиях», блок ДС), очной формы обучения. Большая часть пособия может быть полезной и для студентов педагогических университетов, обучающихся по специальности Математика.

УДК 517
ББК В15я73

ISBN 978-5-8397-0817-4

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2011

Содержание

1	Введение	5
2	Математический анализ на области в \mathbb{R}^n	6
2.1	Определение дифференциала функции	6
2.2	Теоремы об обратном отображении и неявной функции	8
2.3	Внешние дифференциальные формы	10
2.4	Мера Жордана и интеграл Римана	12
2.5	Сведение кратного интеграла к повторному	15
2.6	Замена переменных в кратном интеграле	16
2.7	Интеграл от дифференциальной формы по ориентированному телу	17
2.8	Связь интегрирования с дифференцированием	18
3	Вложенные дифференцируемые многообразия	21
3.1	Криволинейные координаты и многообразия	21
3.2	Первая квадратичная форма	25
3.3	Внешние дифференциальные формы на многообразии в \mathbb{R}^n	31
3.3.1	Форма ориентированного объема	32
3.3.2	Дифференциальные формы, полученные ограничением	34
3.4	Интеграл от дифференциальной формы по сингулярным цепям	35
3.5	Интеграл по ориентированному телу на многообразии	36
3.6	Группы линейных преобразований как многообразия	40
3.6.1	Экспонента от матрицы	40
3.6.2	Группы $GL(n, R)$, $SL(n, R)$, $O(n, R)$, $SO(n, R)$	41
4	Абстрактные дифференцируемые многообразия	43
4.1	Топологические пространства	43
4.2	Топологические многообразия	53
4.3	Карты и атласы	56
4.4	Дифференцируемые отображения	59
4.5	Сигма-процесс	61
4.6	Особенности отображений и функций	69
4.6.1	Функции на плоских кривых	77
4.6.2	Функции на пространственных кривых	82
4.6.3	Функции на поверхности	86
4.6.4	Огибающая семейства плоских прямых	106

4.6.5	Теория Клейна	107
4.7	Векторные поля на многообразии	109
4.8	Дифференциальные формы на многообразии	118
4.8.1	Полилинейные отображения	118
4.8.2	Тензорные поля на многообразии	130
5	Интегрирование на абстрактном многообразии	137
5.1	Введение меры с помощью римановой метрики	138
5.2	Введение меры с помощью дифференциальной формы	139
5.3	Интеграл по цепям	142
5.4	Интеграл по многообразию с краем	143
6	Векторные расслоения	
	и дифференциальные операторы	146
6.1	Векторные расслоения на многообразии	146
6.2	Касательное расслоение	149
6.3	Сечения векторного расслоения	150
6.4	Расслоение струй	151
6.5	Дифференциальные операторы	153
6.6	Символ дифференциального оператора	155
6.7	Ковариантная производная и связность	156
7	Задачи к зачетам и экзаменам	159

1 Введение

Данное учебное пособие написано на основе конспектов лекций, которые я читал для студентов пятого курса и магистрантов первого года обучения. Основные темы, которые рассматриваются, — это дифференцирование и интегрирование. Сначала мы повторяем соответствующие темы из анализа на области в \mathbb{R}^n , причем изложение тем ведется так, чтобы подготовить к анализу на многообразиях. Затем вводится понятие многообразия в \mathbb{R}^n , то есть вложенного многообразия, и строится анализ на таких многообразиях. Наконец, вводятся абстрактные многообразия, на которых по аналогии с вложенными многообразиями определяются и изучаются основные конструкции. Чтобы было понятно и удобно студентам и магистрантам, приходится излагать дополнительно необходимые разделы полилинейной алгебры и топологии. Все это темы одного семестра, когда лекции слушали студенты и магистранты.

Математический анализ изучает функции, причем в классическом анализе эти функции определены на числовом множестве (функции одного действительного переменного) или на области в n -мерном арифметическом пространстве (функции от нескольких действительных переменных). С другой стороны, при изучении криволинейных и поверхностных интегралов приходится рассматривать функции на кривых и поверхностях, которые дают примеры одномерных и двумерных многообразий. Также при изучении задач на условный экстремум приходится рассматривать функции на многомерных вложенных многообразиях. Тем самым классический анализ вынужден затрагивать анализ на многообразиях. Основная наша цель при изложении вещественного анализа на многообразиях — это сформулировать и доказать современную версию теоремы Стокса (см., например, [13]). Эта теорема связывает дифференцирование с интегрированием. Более подробно с дифференциальным исчислением на многообразиях можно познакомиться по книге [12].

Математический анализ применяется в разных науках (дифференциальной геометрии, дифференциальных обыкновенных и частных уравнениях, классической механике, . . .). Современное изложение этих наук требует знаний анализа на многообразиях. Данное пособие призвано помочь в получении таких знаний. В связи с этим, кроме основных тем: современная версия теоремы Стокса и теория многомерных вычетов, мы кратко излагали следующие темы: некоторые примеры дифференцируемых отображений и их особенности, векторные расслоения и дифференциальные операторы.

В тексте пособия содержится большое число задач. Эти задачи предлагаются с разными целями. Задачи в темах, которые уже изучались (анализ на области