МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.А. Крыловецкая, В.Д. Овсянников

Задачи по электродинамике.

Часть 2.

Переменные электромагнитные поля

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Настоящее пособие предназначается для практических занятий по электродинамике для студентов 3 курса физического факультета в 6-м учебном семестре. Оно представляет собой продолжение пособия «Задачи по электродинамике. Часть 1. Стационарные электромагнитные поля» [1], используемого для практических занятий в 5-м семестре, и предоставляет студентам дополнительный к лекционному курсу учебно-методический материал для изучения теории переменных электромагнитных полей и специальной теории относительности.

Основное содержание настоящего пособия составляют задачи по электродинамике нестационарных полей, начиная от квазистационарных полей медленно движущихся зарядов (раздел 1), теории излучения (разделы 2 – 5) и заканчивая теорией рассеяния плоских электромагнитных волн свободными и связанными зарядами (разделы 6 – 7). Заключительная часть пособия (раздел 8) посвящена вопросам специальной теории относительности, включая задачи по релятивистской механике и релятивистской электродинамике.

Материал данного пособия представлен в последовательности, соответствующей схеме изложения курса «Электродинамика» студентам дневного отделения физического факультета специальностей «Радиофизика», «Электроника» и «Физика информационных систем». Каждый раздел содержит основной теоретический материал и рабочие формулы, требующиеся для решения соответствующих практических заданий. Подробное изложение теории и физической сути рассматриваемых вопросов можно найти в курсе лекций, а также в учебниках и монографиях по электродинамике, часть которых дана в списке литературы [2 – 5].

Помимо лекционного курса, успешное усвоение предлагаемого материала основывается на знании элементов векторного и тензорного анализа, теории обобщенных функций, функции комплексного переменного, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [6].

Дополнительный к представленному в данном пособии набор задач можно найти сборниках [7 – 9].

Введение

Основу электродинамики переменных полей составляют уравнения Максвелла для векторов напряженности $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и индукции $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ элек-

1.1. Магнитное поле медленно движущихся зарядов

Задача 1.1. *Показать, что закон Био-Савара, который для линейного тока можно представить в виде*

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\int\limits_L \frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{R}]}{R^3},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$ *— радиус вектор, проведенный из элемента тока* $d\mathbf{l}$ *с координатой* $\mathbf{r}'$ *в точку наблюдения с координатой* $\mathbf{r}$*, является следствием системы уравнений Максвелла для квазистационарного поля.*

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ вводится соотношением:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{4}$$

Подчиняя $\mathbf{A}$ условию калибровки потенциала $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, получим после подстановки (4) в (3) уравнение Пуассона:

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Решение этого уравнения имеет вид $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'$. Теперь вернемся к $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = [\nabla\times\mathbf{A}] = \frac{1}{c}\left[\nabla\times\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\right].$$

Так как $\mathbf{A}$ зависит только от $\mathbf{r}$ и t, то $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$ и его можно внести под знак интеграла:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int\left[\nabla\times\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'\right] = \frac{1}{c}\int\left[\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\right]\,d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{c}\int\left[\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\right]\,d\mathbf{r}' = \frac{1}{c}\int\left[-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{j}\right]\,d\mathbf{r}'.$$

Обозначим $\mathbf{r}-\mathbf{r}'\equiv\mathbf{R}$, тогда

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\times\mathbf{R}]}{R^3}d\mathbf{r}'. \tag{5}$$

Перейдем от объемного тока к линейному с использованием формальной замены в подинтегральном выражении: $\mathbf{j}\,d\mathbf{r}'\to I\cdot d\mathbf{l}'$. В результате получим:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\int\limits_L\frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{R}]}{R^3}.$$

Задача 1.2. *Определить квазистационарное поле точечного заряда e, движущегося с постоянной скоростью* $\mathbf{V}$.

Для решения задачи нам нужно задать плотности распределения заряда и тока. Это удобно сделать, используя дельта-функцию, так как такая запись не противоречит условию задачи: в точке, где находится заряд, плотность будет равна e, в остальных точках пространства она будет равна 0:

$$\rho(\mathbf{r},t) = e\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = e\mathbf{V}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)),$$

где $\mathbf{R}\,(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}\,t$ — координата заряда в момент времени t ($\mathbf{R}_0$ – координата в начальный момент времени $t=0$). Пренебрегая вихревой компонентой электрического поля $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$ (условие квазистационарности поля), можно ввести потенциал φ:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Подставляя это соотношение в (3), получим уравнение Пуассона для φ, решение которого имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)|}.$$

Для напряженности поля отсюда получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)|^3}\,(\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)).$$

Таким образом, электрическое поле медленно движущегося заряда в каждый момент времени t совпадает с полем неподвижного заряда, находящегося в точке $\mathbf{R}\,(t)$, и перемещается в пространстве вместе с зарядом-источником со скоростью $\mathbf{V}$. Подставляя $\mathbf{j}$ в соотношение (5) для магнитного поля, получим:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{e}{c}\left[\mathbf{V}\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)|^3}\right] = \frac{1}{c}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right].$$

Замечание: убедитесь, что полученные выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) с учетом тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{см.}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

1.2. Магнитный момент замкнутого тока

Задача 1.3. *Найти напряженность магнитного поля, создаваемого тонким кольцом радиуса a с током J на больших расстояниях от кольца $r \gg a$.*

Напряженность магнитного поля замкнутого тока на больших расстояниях определяется выражением

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{M}}{r^3},$$

где $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$, $\quad \mathbf{M} = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int\limits_{\mathbf{V}} [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]\mathbf{dr}'$ – магнитный момент тока. Для линейного тока $\mathbf{M} = \dfrac{J}{2c}\displaystyle\oint\limits_{L}[\mathbf{r}'\times\mathbf{dl}] = \dfrac{J}{c}\mathbf{S}$, где $\mathbf{S}$ – векторная площадь поверхности, ограниченной контуром с током L. Для кольца $\mathbf{S} = \pi a^2\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор–нормаль к плоскости кольца, образующий с направлением тока J правовинтовую систему. Таким образом,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\pi a^2 J}{cr^3}\{3\mathbf{n}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n}) - \boldsymbol{\nu}\}.$$

Задача 1.4. *Шар радиуса a с полным зарядом q равномерно вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Определить магнитный момент шара, если заряд распределен равномерно: а) по объему шара, б) по поверхности шара.*

а) Исходя из общей формулы для определения магнитного момента:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int\limits_V [\mathbf{r}\,' \times \mathbf{j}\,(\mathbf{r}\,')]\, d\,\mathbf{r}\,'$$

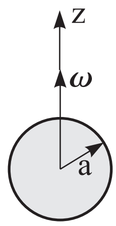

Рис. 1

с учетом того, что плотность тока можно записать через угловую скорость вращения шара $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = \rho\,[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,']$, раскрывая двойное векторное произведение имеем:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int\limits_V \rho\boldsymbol{\omega} r\,'^2 d\,V\,' - \frac{1}{2c}\int\limits_V \rho\omega z'\mathbf{r}\,' d\,V\,'.$$

Дальнейшие вычисления проводим в сферической системе координат $\{r, \theta, \phi\}$, определяющей декартовы координаты радиус-вектора $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta;$$

ŋqdqyeY bE dəqEbY3ə d əɑɑqəʎ Ǝqqqyqyə