МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И.填мо,
М. В. Фролов

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть I
Электромагнитные явления в вакууме

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Содержание

Микроскопическая теория электромагнитных явлений в вакууме

1. Уравнения электромагнитного поля

1.1. Законы электромагнетизма как результат обобщения опытных данных

Закон сохранения заряда. Способность элементарных частиц, микрочастиц и макротел участвовать в электромагнитном взаимодействии характеризуется электрическим зарядом, причем существуют заряды двух видов — положительные и отрицательные. Тела с одноименными зарядами отталкиваются, с разноименными — притягиваются. Опыт показывает, что во всех явлениях природы выполняется закон сохранения заряда: заряд не может ни возникать из ничего, ни исчезать, а только перераспределяется между телами. Это значит, что полный заряд Q в некоторой области пространства может измениться только за счет того, что заряженные частицы пересекают границу области. Введем понятие полного тока J как количества заряда, который пересекает границу области в единицу времени t. Будем считать, что $J > 0$, если заряд «вытекает» из области, и $J < 0$, если заряд «втекает» в область. Тогда закон сохранения заряда (в интегральной форме) может быть выражен уравнением

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -J. \tag{1.1}$$

Введем теперь понятие плотности заряда и плотности тока и перепишем (1.1) в другом виде. Пусть имеется тело с большим количеством заряженных частиц в нем. Разобьем объем V на малые элементы (физически бесконечно малые объемы) ΔV такие, что $\Delta V \ll V$, но в ΔV все еще содержится много элементарных зарядов, так что отношения типа $\Delta Q/\Delta V$, где $\Delta Q = \sum\limits_{i\in\Delta V} e_i$ — полный заряд внутри ΔV, мало меняются при изменении ΔV. Так как ΔV макроскопически мал, то его положение можно характеризовать единственным радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным в какую-либо точку области ΔV. Назовем отношение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{1.2}$$

объемной плотностью заряда в данной точке. Полный заряд во всем объеме

$$Q = \sum \Delta Q = \sum \rho \Delta V \longrightarrow \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Таким образом, для систем, в которых электрический заряд можно рассматривать как распределенный непрерывно, полный заряд есть интеграл от объемной плотности:

$$Q = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \tag{1.3}$$

Если в некоторой области пространства имеется только один заряд e_a, то, очевидно, объемную плотность нельзя ввести с помощью (1.2). Будем в этом случае исходить из соотношения (1.3) и определим ρ так, чтобы выполнялись равенства

$$Q = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \begin{cases} e_a, & \mathbf{r}_a \in V, \\ 0, & \mathbf{r}_a \notin V. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно записать через дельта-функцию:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ — радиус-вектор заряда e_a. Напомним, что $\delta(x)$ определяется как функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция равна нулю при всех $x < 0$ и при всех $x > 0$;
2) функция бесконечна при $x = 0$;
3) интеграл от этой функции, взятый в пределах от $-\infty$ до ∞, равен 1.

Аналогичным образом вводится трехмерная дельта-функция $\delta(\mathbf{r})$. Из свойств дельта-функции следует основное соотношение

$$\int\limits_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_a), \qquad \text{если } \mathbf{r}_a \in V,$$

которое было использовано при введении объемной плотности точечного заряда.

Если имеется несколько точечных зарядов, то плотность заряда дается выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{1.4}$$

Введем теперь плотность электрического тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость зарядов, и найдем, как $\mathbf{j}$ связана с током через поверхность. Выделим площадку dS с нормалью $\mathbf{n}$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ — вектор площадки) и вычислим ток, проходящий через dS. Пусть скорость зарядов в месте расположения площадки — $\mathbf{v}$, тогда в единицу времени площадку пересекут заряды, находящиеся внутри цилиндра с осью, параллельной $\mathbf{v}$, и высотой $(\mathbf{vn}) = v_n$ (рис. 1), т.е.

$$dJ = \rho v_n dS = (\rho\mathbf{v}, \mathbf{n})dS = (\mathbf{j}d\mathbf{S}).$$

Полный ток через произвольную площадку S конечных размеров

$$J = \int\limits_S \mathbf{j}d\mathbf{S}. \tag{1.6}$$

Если в объеме имеется несколько зарядов или заряды рассматриваются как точечные (что можно делать всегда), то из (1.4), (1.5) получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{1.7}$$

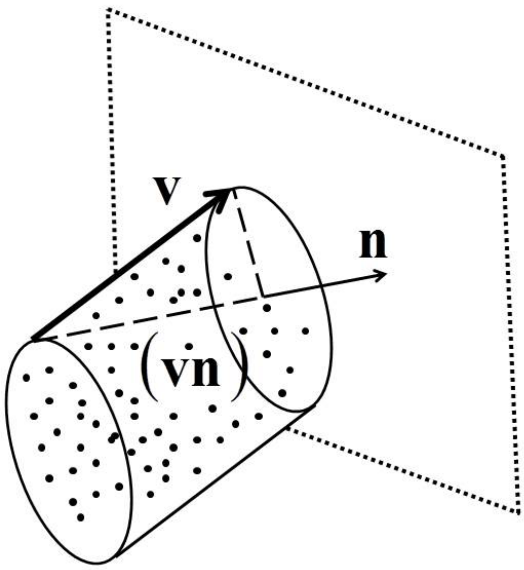

Рис. 1

Запишем теперь закон сохранения электрического заряда (1.1) для некоторого объема V, окруженного замкнутой поверхностью S в другой форме. Левую часть, учитывая (1.3), перепишем в виде

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t)dV = \int\limits_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}dV.$$