

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И. Мармо,
М. В. Фролов

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть I

Электромагнитные явления в вакууме

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Содержание

Введение	5
Микроскопическая теория электромагнитных явлений в вакууме	6
1. Уравнения электромагнитного поля	6
1.1. Законы электромагнетизма как результат обобщения опытных данных	6
1.2. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме	15
1.3. Энергия электромагнитного поля	18
1.4. Единственность решения уравнений Максвелла	20
1.5. Импульс электромагнитного поля	22
2. Постоянное электрическое поле	25
2.1. Основные уравнения постоянного электрического поля . . .	25
2.2. Энергия электростатического поля	29
2.3. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Дипольный и квадрупольный моменты	32
2.4. Система зарядов в квазиоднородном внешнем поле	37
3. Постоянное магнитное поле	40
3.1. Основные уравнения. Закон Био — Савара — Лапласа	40
3.2. Магнитный момент	43
3.3. Магнитная энергия постоянных токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции	47
3.4. Токи в квазиоднородном магнитном поле	49
3.5. Силы в постоянном магнитном поле	50
4. Переменное электромагнитное поле	52
4.1. Уравнения для электромагнитных потенциалов	52
4.2. Электромагнитные волны	55
4.3. Плоские монохроматические волны	59
4.4. Поляризация волны	61
4.5. Запаздывающие потенциалы	63
4.6. Потенциалы Лиенара — Вихерта	65
5. Излучение и рассеяние электромагнитных волн	67
5.1. Поле системы зарядов на далеких расстояниях	67
5.2. Дипольное излучение	70

Микроскопическая теория электромагнитных явлений в вакууме

1. Уравнения электромагнитного поля

1.1. Законы электромагнетизма как результат обобщения опытных данных

Закон сохранения заряда. Способность элементарных частиц, микрочастиц и макротел участвовать в электромагнитном взаимодействии характеризуется электрическим зарядом, причем существуют заряды двух видов — положительные и отрицательные. Тела с одноименными зарядами отталкиваются, с разноименными — притягиваются. Опыт показывает, что во всех явлениях природы выполняется закон сохранения заряда: заряд не может ни возникнуть из ничего, ни исчезнуть, а только перераспределяется между телами. Это значит, что полный заряд Q в некоторой области пространства может измениться только за счет того, что заряженные частицы пересекают границу области. Введем понятие полного тока J как количества заряда, который пересекает границу области в единицу времени t . Будем считать, что $J > 0$, если заряд «вытекает» из области, и $J < 0$, если заряд «втекает» в область. Тогда закон сохранения заряда (в интегральной форме) может быть выражен уравнением

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -J. \quad (1.1)$$

Введем теперь понятие плотности заряда и плотности тока и перепишем (1.1) в другом виде. Пусть имеется тело с большим количеством заряженных частиц в нем. Разобьем объем V на малые элементы (физически бесконечно малые объемы) ΔV такие, что $\Delta V \ll V$, но в ΔV все еще содержится много элементарных зарядов, так что отношения типа $\Delta Q/\Delta V$, где $\Delta Q = \sum_{i \in \Delta V} e_i$ — полный заряд внутри ΔV , мало меняются при изменении ΔV . Так как ΔV макроскопически мал, то его положение можно характеризовать единственным радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным в какую-либо точку области ΔV . Назовем отношение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (1.2)$$

объемной плотностью заряда в данной точке. Полный заряд во всем объеме

$$Q = \sum \Delta Q = \sum \rho \Delta V \longrightarrow \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Таким образом, для систем, в которых электрический заряд можно рассматривать как распределенный непрерывно, полный заряд есть интеграл от объемной плотности:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (1.3)$$

Если в некоторой области пространства имеется только один заряд e_a , то, очевидно, объемную плотность нельзя ввести с помощью (1.2). Будем в этом случае исходить из соотношения (1.3) и определим ρ так, чтобы выполнялись равенства

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \begin{cases} e_a, & \mathbf{r}_a \in V, \\ 0, & \mathbf{r}_a \notin V. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно записать через дельта-функцию:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ — радиус-вектор заряда e_a . Напомним, что $\delta(x)$ определяется как функция, обладающая следующими свойствами:

- 1) функция равна нулю при всех $x < 0$ и при всех $x > 0$;
- 2) функция бесконечна при $x = 0$;
- 3) интеграл от этой функции, взятый в пределах от $-\infty$ до ∞ , равен 1.

Аналогичным образом вводится трехмерная дельта-функция $\delta(\mathbf{r})$. Из свойств дельта-функции следует основное соотношение

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_a), \quad \text{если } \mathbf{r}_a \in V,$$

которое было использовано при введении объемной плотности точечного заряда.

Если имеется несколько точечных зарядов, то плотность заряда дается выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (1.4)$$

Введем теперь плотность электрического тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость зарядов, и найдем, как \mathbf{j} связана с током через поверхность. Выделим площадку dS с нормалью \mathbf{n} ($d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ — вектор площадки) и вычислим ток, проходящий через dS . Пусть скорость зарядов в месте расположения площадки — \mathbf{v} , тогда в единицу времени площадку пересекут заряды, находящиеся внутри цилиндра с осью, параллельной \mathbf{v} , и высотой $(\mathbf{v}\mathbf{n}) = v_n$ (рис. 1), т.е.

$$dJ = \rho v_n dS = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{n}) dS = (\mathbf{j} d\mathbf{S}).$$

Полный ток через произвольную площадку S конечных размеров

$$J = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Если в объеме имеется несколько зарядов или заряды рассматриваются как точечные (что можно делать всегда), то из (1.4), (1.5) получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (1.7)$$

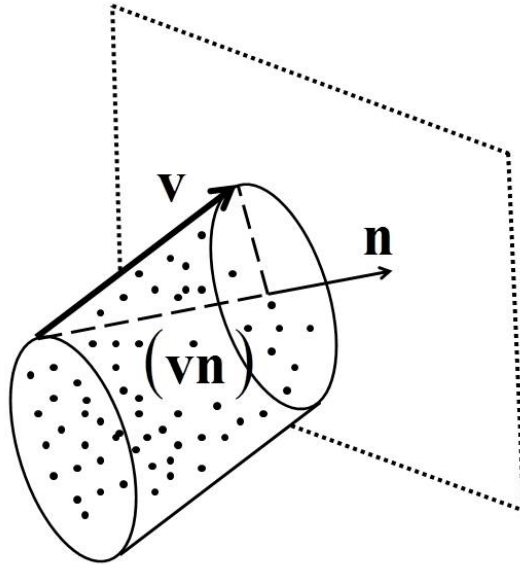


Рис. 1

Запишем теперь закон сохранения электрического заряда (1.1) для некоторого объема V , окруженного замкнутой поверхностью S в другой форме. Левую часть, учитывая (1.3), перепишем в виде

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV.$$