МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.И. Костылев

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ЭНЕРГИИ

Часть 1

Вероятность ложной тревоги

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ŋqdqʎeY bɆ dəbƎbʎɜə d ɛɔɑbɔʎ Ɉqdqʎqʎè

Задача обнаружения сигнала в шуме решается путем отображения выборочного пространства $\mathbf{R}^n$ на пространство решений Γ, состоящее из двух элементов, γ_0 и γ_1, причем γ_0 есть решение об отсутствии сигнала, а γ_1 — решение о наличии сигнала.

Задача различения векторов (или выборок) также состоит в отображении выборочного пространства на пространство решений. Если различаемых векторов только два, то и гипотез $\{H_\varsigma\}$ о них только две, а именно, H_0 и H_1. Пространство решений Γ в этом случае снова состоит только из двух элементов, γ_0 и γ_1, причем γ_0 есть решение в пользу гипотезы H_0, а γ_1 — решение в пользу гипотезы H_1.

С целью обнаружения сигнала или различения векторов выборочное пространство разбивается на два подпространства $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$. Границу, разделяющую эти подпространства, будем называть решающей поверхностью[2]. Если $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_0$, то принимается решение γ_0, а в случае $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_1$ — решение γ_1. Каждое из двух решений может быть как верным, так и ошибочным. Количественно ошибочные решения характеризуются вероятностями

$$\alpha = \Pr\{\gamma_1 | H_0\}, \quad \beta = \Pr\{\gamma_0 | H_1\}. \tag{4}$$

При этом α называется вероятностью ошибки первого рода, а β — вероятностью ошибки второго рода. В теории обнаружения вероятность ошибки первого рода называют также вероятностью ложной тревоги, а вероятность ошибки второго рода — вероятностью пропуска цели.

Форму и положение решающей поверхности определяет критерий принятия решения. В настоящее время наибольшее распространение имеют критерий Неймана — Пирсона и критерий Байеса. При этом критерий максимального правдоподобия и критерий максимального апостериорного риска можно трактовать как частные случаи критерия Байеса [2].

II. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ОБНАРУЖИТЕЛЬ

Пусть решающая поверхность есть сфера[3] радиуса $\Re$, имеющая центр в начале координат. Таким образом, подпространство $\mathbf{R}_0$ представляет собой шар[4] радиуса $\Re$ с центром в начале координат и решение γ_0 выносится в том случае, когда вектор наблюдения не выходит за пределы шара, т.е. в случае выполнения неравенства

$$\sum_{m=1}^{n} r_m^2 < \Re^2 . \tag{5}$$

Обнаружитель, реализующий описанное правило проверки гипотез, называют энергетическим обнаружителем. Таким образом, при энергети-

---

[2] В частном случае $n = 2$ решающая поверхность вырождается в решающую линию на плоскости.

[3] При $n = 2$ сфера вырождается в окружность.

[4] При $n = 2$ — круг.

ческом обнаружении с порогом, представляющим собой квадрат радиуса сферы, сравнивается квадрат нормы вектора наблюдения.

При этом формулы (4) для вероятностей ошибочных решений преобразуются в

$$\alpha = \Pr\left\{\sum_{m=1}^{n} r_m^2 \geq \Re^2 \middle| H_0\right\}, \quad \beta = \Pr\left\{\sum_{m=1}^{n} r_m^2 < \Re^2 \middle| H_1\right\}. \tag{6}$$

В случае использования критерия Неймана — Пирсона радиус $\Re$ выбирается так, чтобы обеспечить нужную вероятность ошибки первого рода α. При использовании критерия Байеса радиус $\Re$ выбирается иначе, по более громоздкой методике.

III. ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ

Вероятность ложной тревоги — другое название ошибки первого рода α. В общем случае она определяется первой из формул (4). В случае энергетического обнаружителя вероятность ложной тревоги описывается первой из формул (6). Формула (6) может быть конкретизирована посредством выбора модели шума. Наиболее распространенная модель шума — белый гауссовский шум.

1. Белый гауссовский шум

Согласно модели белого гауссовского шума в случае реализации гипотезы H_0 все элементы $\{r_i\}$ обрабатываемой выборки независимы, имеют нулевые средние значения, подчиняются нормальному (гауссовскому) закону распределения вероятностей и имеют одинаковые диспресии. Обозначим последние $\sigma_{ш}^2$.

При этом сумма в левой части (5) имеет гамма-распределение и вероятность ложной тревоги может быть выражена аналитически через рофункцию [3]

$$\mathrm{P}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^y z^{x-1} \exp(-z)\,dz, \tag{7}$$

а именно,

$$\alpha = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{n}{2}, \frac{\Re^2}{2\sigma_{ш}^2}\right). \tag{8}$$

Здесь

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} \exp(-z)\,dz \ - \tag{9}$$

гамма-функция [4], $\sigma_{ш}^2$ — дисперсия одного отсчета шума.

Из (7) очевидно, что ро-функция представляет собой не что иное, как нормированную неполную гамма-функцию. В программной среде MATLAB ро-функция запрограммирована в файле gammainc.m.

При целом значении первого аргумента ро-функция допускает разложение в конечную сумму [3]. Поэтому в случае когда размер выборки есть четное число, имеет место альтернативная (8) формула, а именно,

$$\alpha = \exp\left(-\frac{\Re^2}{2\sigma_ш^2}\right)\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\Re^{2m}}{m!\left(2\sigma_ш^2\right)^m}. \tag{10}$$

Согласно формулам (8) и (10) вероятность ложной тревоги α зависит от трех параметров, а именно, n, $\sigma_ш^2$ и $\Re$. Однако количество параметров можно уменьшить до двух, если ввести следующее обозначение:

$$h = \frac{\Re^2}{2\sigma_ш^2}. \tag{11}$$

Будем называть параметр h — «нормированный порог обнаружения».
С учетом введенного обозначения формулу (8) можно переписать в виде

$$\alpha = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{n}{2}, h\right). \tag{12}$$

Аналогичным образом преобразуется и формула (10):

$$\alpha = \exp(-h)\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{h^m}{m!}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что вероятность ложной тревоги зависит только от двух параметров — размерности выборочного пространства n и нормированного порога обнаружения h.

На рис. 1 приведен текст программы-функции, предназначенной для расчета вероятности ошибки первого рода по формуле (12).

```
function alpha =alphaVIK(h, n)
% Входные параметры:
% h - нормированный пороговый уровень
% n - размерность выборочного пространства
%
% Выходной параметр
% alpha - вероятность ложной тревоги
alpha=1-gammainc(h, 0.5*n);
end
```

Рис. 1. Текст программы

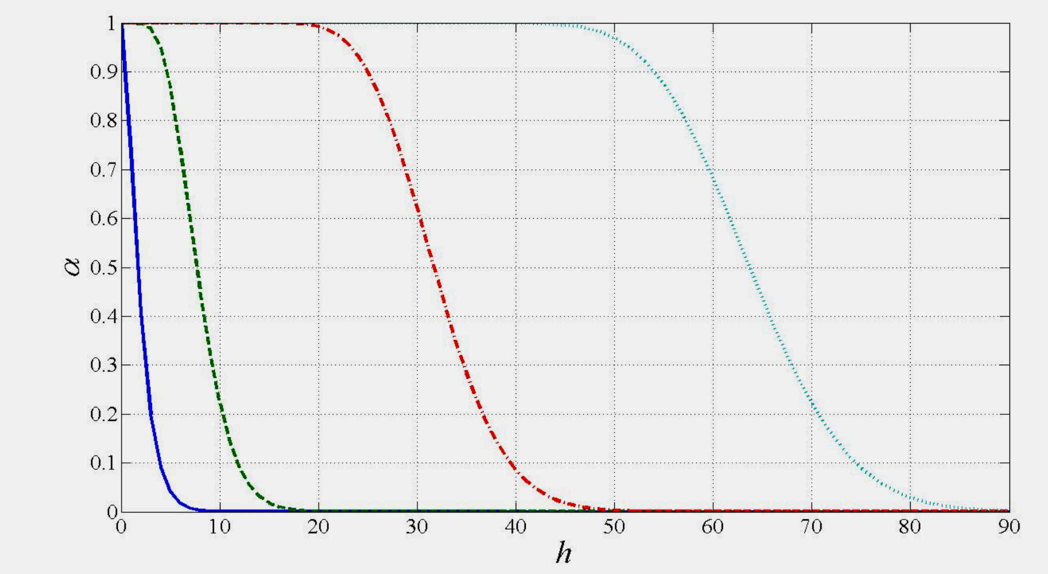

Рис. 2. Зависимость вероятности ложной тревоги от порога обнаружения

На рис. 2 показаны графики зависимости вероятности ложной тревоги от величины нормированного порогового уровня h для различных значений размерности выборочного пространства n. Сплошная линия соответствует случаю $n = 4$, пунктирная — $n = 16$, штрих-пунктирная — $n = 64$ и точечная — $n = 128$. Как следует из хода кривых на рис. 2, вероятность ложной тревоги убывает с увеличением порогового уровня и с уменьшением размерности выборочного пространства. Такая зависимость вероятности ложной тревоги от параметров не противоречит здравому смыслу.

Вероятность ложной тревоги может быть также рассчитана методом статистического моделирования. На рис. 3 приведен текст программы-функции, предназначенной для расчета вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя для случая белого гауссовского шума методом статистического моделирования. Здесь используется функция randn, предназначенная для генерации стандартных[5] гауссовских случайных величин.

```
function alpha=alphaSmVIK(h, n, N)
% Входные параметры:
% h - нормированный пороговый уровень
% n - размерность выборочного пространства
% N - количество генерируемых случайных величин
%
% Выходной параметр
% alpha - вероятность ложной тревоги
alpha=sum(sum(randn(n, N).^2)>2*h)/N;
end
```

Рис. 3. Текст программы

[5] Стандартной гауссовской случайной величиной называется случайная величина, имеющая нормальный (гауссовский) закон распределения вероятностей, нулевое среднее значение и единичную дисперсию.

Графики, расчитанные с помощью этой программы, полностью совпали с графиками, показанными на рис. 2.

Соответственно (11) изменится и формула (5), описывающая алгоритм обнаружения. С учетом (11) она примет вид:

$$\frac{1}{2\sigma_{ш}^{2}}\sum_{m=1}^{n} r_m^2 < h. \tag{14}$$

Строго говоря, правило обнаружения (14) требует знания дополнительной (по сравнению с правилом (5)) информации о дисперсии шума и это выглядит как необоснованное усложнение алгоритма обнаружения. Однако критерий Неймана-Пирсона требует, чтобы вероятность ложной тревоги была стабильна и равнялась наперед заданной величине. Без знания дисперсии шума удовлетворить такому требованию невозможно, поэтому правило (14), явно учитывающее дисперсию шума, не является более сложным, чем правило (5), явно эту дисперсию не учитывающее, поскольку (5) учитывает эту дисперсию неявно.

Из (12) следует, что нормированный порог обнаружения должен быть таким:

$$h = \mathrm{P}_{inv}\left(n/2, 1-\alpha\right). \tag{15}$$

Здесь P_{inv} — функция, обратная ро-функции (7), а α — наперед заданная (в соответствии с критерием Неймана—Пирсона) вероятность ложной тревоги. В программной среде MATLAB функция P_{inv} запрограммирована в файле gammaincinv.m.

На рис. 4 приведен текст программы-функции, предназначенной для вычисления требуемого значения порога h, обеспечивающего при заданном n требуемую вероятность ложной тревоги α.

```
function h =hVIK(n, alpha)
% Входные параметры:
% n - размерность выборочного пространства
% alpha - вероятность ложной тревоги
%
% Выходной параметр
% h - порог обнаружения
h=gammaincinv(1-alpha, 0.5*n);
end
```

Рис. 4. Текст программы

На рис. 5 показаны графики зависимости требуемого нормированного порогового уровня, обеспечивающего заданную вероятность ложной тревоги, от величины вероятности ложной тревоги. Рис. 5, а соответствует случаю $n = 8$, а рис. 5, б — $n = 128$.