МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Т. И. Смагина

НЕПРЕРЫВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Введение

Решение многих сложных научных и технических задач значительно упрощается при моделировании, то есть замещении одних объектов другими, сохраняющими наиболее существенные свойства и особенности замещаемых объектов. Математическое моделирование превратилось в один из универсальных методов познания и применяется практически во всех современных науках, как естественных, так и общественных, как теоретических, так и экспериментальных.

Непрерывные математические модели содержательных прикладных задач могут быть различными (краевые или начальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, интегральные и алгебраические уравнения и т.п.). Методы функционального анализа позволяют рассматривать их как операторные уравнения в соответствующих функциональных пространствах и, следовательно, исследовать эти модели с единых позиций.

В учебном пособии рассматриваются некоторые приближенные способы решения операторных уравнений в бесконечномерных пространствах. Для линейных уравнений изучаются метод малого параметра, с позиций единой схемы метода моментов рассмотрены методы Галеркина, наименьших квадратов, коллокаций и метод конечных элементов. Для нелинейных уравнений изучается метод Ньютона-Канторовича.

Все предлагаемые схемы иллюстрируются либо на интегральных уравнениях, либо на краевых задачах для дифференциальных уравнений второго порядка, которые служат математической моделью самого широкого круга прикладных задач.

Предполагается наличие у слушателей знаний основных положений университетского курса "Функциональный анализ". Некоторые из этих положений приводятся по ходу изложения материала. Сведения об интеграле и пространствах Лебега даны в приложении.

Конец доказательства утверждений отмечается значком $\Box$.

Пространство X называется *полным,* если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом этого же пространства.

Теорема 1.1. *Пространство $C[a,b]$ полно.*

Теорема 1.2. *Пространства $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$ неполны.*

В пространствах $CL_p[a,b]$, $p = 1, 2$, существуют последовательности, которые по норме этих пространств сходятся к разрывной функции. Примером такой последовательности служит последовательность непрерывных функций, заданная следующим образом:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, \text{ при } & t \in [-1, -1/n], \\ nt, \text{ при } & t \in [-1/n, 1/n], \\ +1, \text{ при } & t \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Можно показать, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в $CL_p[-1,1]$, сходится по норме $CL_p[-1,1]$, $p = 1, 2$, к разрывной функции

$$x_0(t) = \begin{cases} -1, \text{ при } & t \in [-1, 0), \\ 0, \text{ при } & t = 0, \\ +1, \text{ при } & t \in (0, 1] \end{cases} \qquad \notin CL_p[a,b]$$

и не сходится по норме пространства $CL_p[a,b]$, $p = 1, 2$, ни к какой непрерывной функции.

Если некоторое пространство неполно, то его можно пополнить до более широкого пространства, которое будет уже полным пространством. Полное пространство $\widetilde{X}$ называется *пополнением* нормированного пространства X, если: 1) $X \subset \widetilde{X}$; 2) $\overline{X} = \widetilde{X}$, где $\overline{X} = X \cup X'$ – замыкание множества X, т.е. присоединение к X всех его предельных точек X'.

Теорема 1.3. *Каждое нормированное пространство имеет пополнение.*

Пространства Лебега. *Пространством Лебега $L_1[a,b]$* называется пополнение пространства $CL_1[a,b]$, т.е.

$$L_1[a,b] = \overline{CL_1[a,b]}.$$

Т.о., если $x \in L_1[a,b]$, то существует последовательность x_n непрерывных функций, *фундаментальная в среднем*, т.е.

$$\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty$$

и такая, что

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (*)$$

Сходимость в интегральном смысле (*) называется *сходимостью в среднем.*

Рассмотрим фундаментальную в среднем последовательность $\{x_n(t)\}$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n, m \geq N$ выполняется неравенство

$$\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Всякая непрерывная функция интегрируема по Риману. Покажем, что существует предел последовательности римановских интегралов $(R)\int_a^b x_n(t)\, dt = I_n$. Имеем

$$|I_n - I_m| = \left|(R)\int_a^b x_n(t)\, dt - (R)\int_a^b x_m(t)\, dt\right| = \left|(R)\int_a^b [x_n(t) - x_m(t)]\, dt\right|$$

$$\leq (R)\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|\, dt \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m \geq N.$$

Т.к. $\mathbb{R}$ – полное пространство, то числовая последовательность $\{I_n\}$ в силу критерия Коши имеет предел. Этот предел называется *интегралом Лебега* от функции $x(t)$, т.е.

$$(L)\int_a^b x(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b x_n(t)\, dt.$$

Заметим, что интеграл в соотношении (*) понимается в смысле Лебега. Конструктивное построение интеграла Лебега дано в приложении I.

Замечание 1.2. *Подобно тому, как иррациональные числа можно трактовать как некоторые идеальные элементы, к которым можно* *сколь угодно близко приблизиться с помощью рациональных чисел, так и элементы пространства $L_1[a,b]$ можно рассматривать как некоторые идеальные функции $x(t)$, к которым можно сколь угодно точно приблизиться в среднем с помощью непрерывных функций $x_n(t)$, т.е.*

$$\int_a^b |x(t) - x_n(t)|\, dt \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Элементы пространства $L_1[a,b]$ называются *измеримыми суммируемыми (интегрируемыми по Лебегу)* функциями, т.е. $(L)\int_a^b |x(t)|\, dt < \infty$. Норма в этом пространстве задаётся следующим образом

$$\|x\|_{L_1} = (L)\int_a^b |x(t)|\, dt.$$

Пространством Лебега $L_2[a,b]$ называется пополнение пространства

$CL_2[a,b]$, т.е.

$$L_2[a,b] = \overline{CL_2[a,b]}.$$

Т.о., если $x \in L_2[a,b]$, то существует последовательность $\{x_n(t)\}$ непрерывных функций, *фундаментальная в среднем квадратичном*, т.е.

$$\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|^2\, dt \to 0, \quad \text{при} \quad n, m \to \infty$$

и такая, что

$$(L)\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^2\, dt \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (**)$$

Сходимость в интегральном смысле (**) называется *сходимостью в среднем квадратичном.*

Элементы пространства $L_2[a,b]$ называются *измеримыми суммируемыми с квадратом функциями*, т.е. $(L)\int_a^b |x(t)|^2\, dt < \infty$. Норма в пространстве $L_2[a,b]$ задаётся следующим образом

$$\|x\|_{L_2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

ŋqdqayeY pE dedEpYae d eaαpcaY ЭqdqYape

Теорема 1.4. *Пространство $L_2[a,b]$ вложено в $L_1[a,b]$.*

Доказательство следует из *неравенства Коши-Буняковского*

$$\int_a^b x(t)y(t)\,dt \le \left(\int_a^b x^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b y^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Действительно, если $x(t)\in L_2[a,b]$, тогда $x(t)\in L_1[a,b]$, так как

$$\int_a^b 1\cdot x(t)\,dt \le \left(\int_a^b 1^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b x^2(t)\,dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Приведём пример функции $x(t)\in L_1[a,b]$ такой, что $x(t)\notin L_2[a,b]$. Пусть $[a,b]=[0,1]$ и $x(t)=t^\alpha$, где α подлежит определению. Имеем

$$\int_0^1 x(t)\,dt = \int_0^1 t^\alpha\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^\infty < \infty,$$

если $\alpha+1>0$. Кроме того,

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt = \int_0^1 t^{2\alpha}\,dt = \frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\Big|_0^\infty = \infty,$$

если $2\alpha+1<0$. Таким образом, при $-1<\alpha<-1/2$ функция $t^\alpha\in L_1[a,b]$, но $t^\alpha\notin L_2[a,b]$.

1.2. Линейные операторы. Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ - линейные нормированные пространства над одним и тем же полем чисел $\mathbb{K}=\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Пусть существует оператор (отображение) $A: D(A)\subset X\to Y$, ставящий в соответствие элементу $x\in D(A)$ единственный элемент $y\in Y$. Множество $D(A)\subset X$ называется *областью определения* оператора A. Множество элементов вида $R(A)=\{y\in Y: y=Ax,\ x\in D(A)\}$ называется *областью значений* оператора A. Говорят, что элемент y является *образом* элемента x, а элемент x - *прообразом* элемента y.

Оператор $A: D(A)\subset X\to Y$ называется *линейным*, если:

1) $D(A)$ - линейное пространство;

2) $A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2$ для всех $x_1,\ x_2\in D(A)$ и любых скаляров $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

Линейный оператор $A : X \to Y$ называют *ограниченным*, если существует такая константа $M > 0$, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X. \tag{1.1}$$

Нормой $\|A\|$ оператора A называют наименьшую из констант M, для которых выполнено условие (1.1).

Замечание 1.3. *Если для всех $x \in X$ выполнено неравенство (1.1) и существует элемент x_0 такой, что $\|Ax_0\| = M\|x_0\|$, то $\|A\| = M$.*

Имеют место равенства

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Примеры

1. Пусть φ - непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Рассмотрим отображение $A : C[a, b] \to C[a, b]$, определяемое соотношением

$$(Ax)(t) = \varphi(t)x(t).$$

Доказать, что A - линейный ограниченный оператор и найти его норму.

Решение. Линейность оператора следует из соотношения

$$(A(\alpha x + \beta y))(t) = \varphi(t)(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t).$$

Покажем, что A - ограниченный оператор. Имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{t \in [a,b]} |(Ax)(t)| = \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)x(t)| \le \|\varphi\|_C \|x\|_C,$$

поэтому $\|A\|_C \le \|\varphi\|_C$.

Докажем, что $\|A\| = \|\varphi\|_C$. Рассмотрим функцию $x_0(t) \equiv 1$. Очевидно, что $\|x_0\|_C = 1$ и $\|Ax_0\|_C = \max\limits_{t \in [a,b]} |\varphi(t)| = \|\varphi\|_C$. Таким образом, $\|A\| = \|\varphi\|_C$.

2. Доказать линейность, ограниченность и найти норму оператора $(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s)\, ds$, если: a) $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$,

b) $A : L_2[0, 1] \to C[0, 1]$.