УДК 531.38 DOI: 10.18698/2308-6033-2021-5-2076

Нелинейные колебания поверхности раздела двух жидкостей при угловых колебаниях бака

© Вин Ко Ко, Ян Наинг У

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Развитие ракетно-космической техники привело к широкому использованию криогенных жидкостей, вследствие чего было предложено создать некоторый запас криопродукта, одновременно находящегося в двухфазном или трехфазовом состоянии, образуя при этом слои жидкости, для увеличения их срока хранения на борту космических аппаратов или в танкерах будущих космических заправочных станций. Рассмотрена задача в нелинейной постановке о колебаниях поверхности раздела двухслойной жидкости в произвольной осесимметричной полости твердого тела, совершающего угловые колебания вокруг горизонтальной оси. Для рассматриваемого класса полостей с произвольным дном и крышкой нелинейная задача сведена к последовательному решению линейных краевых задач. Получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания поверхности раздела двух жидкостей в окрестности основного резонанса. В случае круговой цилиндрической полости с плоскими днищами решения краевых задач в виде цилиндрических функций использовали для вычисления линейных и нелинейных гидродинамических коэффициентов в зависимости от глубины и плотности верхней жидкости.

Ключевые слова: *механическая система, цилиндрическая полость, гидродинамические коэффициенты, основной резонанс, возмущенная поверхность, вращательное движение.*

Введение. Нелинейные задачи динамики ограниченного объема слоистых жидкостей с поверхностью раздела представляют значительный прикладной и теоретический интерес. Подобным задачам посвящено большое число работ, опубликованных в XX и XXI вв.

Из основных работ прошлого столетия отметим основополагающие труды Л.Н. Сретенского [1], Л.Д. Ландау [2], в которых изложены основные сведения и методы исследования колебаний двух жидкостей, и [3, 4], где исследуется задача о колебаниях двухслойной жидкости. В [3] рассмотрена новая нелинейная задача о распространении волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном — жидкий слой со свободной поверхностью» и получены решения первых двух линейных приближений, а также условия разрешимости второго и третьего линейных приближений. В [4] теоретически и экспериментально исследованы поверхностные и внутренние сейши в прямоугольном наклонном бассейне, заполненном двухслойной жидкостью. В рамках линейной теории мелкой воды выполнены расчеты в одномерной постановке в предположении длинного и узкого водоема.

Среди современных работ отметим те, что опубликованы в российских источниках [5–10]. Так, в [5] приведено экспериментальное изучение динамики границы раздела двух несмешивающихся жидкостей различной плотности в горизонтальной цилиндрической полости при вращении. В [6] анализируется задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. В [7] рассмотрен эффект влияния верхнего слоя вязкой жидкости на колебания двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде.

В [8] выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной жидкости в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на свободной и внутренних поверхностях жидкости. В [9, 10] исследованы проблемы течений стратифицированных и вращающихся жидкостей и регуляризация баротропных гравитационных волн в двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. В работах [11–13] представлены малые колебания двух- и трехслойных жидкостей в полостях различной формы для случаев подвижного и неподвижного твердого тела. При проведении экспериментов с жидкостями, полностью заполняющими круглый цилиндрический бак, вблизи основного резонанса было замечено вращательное движение слоев жидкостей, подобное движению свободной поверхности однородной жидкости.

Особенности нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, показаны в [14–16]. В случае полного заполнения полости одной однородной идеальной несжимаемой жидкостью фундаментальные результаты получены Н.Е. Жуковским [17]. В [18] исследуются нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы.

Из примыкающих к рассматриваемой задаче работ, опубликованных за рубежом, отметим статьи по нелинейным колебаниям двухслойной жидкости [19–24], в которых проведено теоретическое и экспериментальное исследование плесканий двух жидкостей при наличии свободной поверхности и без свободной поверхности.

В [25, 26] были изучены нелинейные эффекты колебания двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объем, и в результате построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке.

Цель настоящей статьи — получить и провести анализ нелинейных уравнений движения поверхности раздела двух жидкостей, заполняющих полностью осесимметричную полость твердого тела, совершающего угловые колебания вокруг неподвижной оси. Краткое содержание работы изложено в тезисах докладов 11-й Международной конференции «Волны и вихри в сложных средах».

Постановка задачи. Рассмотрена произвольная осесимметричная полость твердого тела, полностью заполненная двумя несмешивающимися жидкостями, которая совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси. Считаем, что форма области, занимаемой жидкостями в районе невозмущенной цилиндрической поверхности раздела, близка к цилиндрической. К этому классу полостей можно отнести все цилиндрические баки с коническими, эллиптическими, сферическими, плоскими и другими днищами. Движение твердого тела вокруг горизонтальной оси зададим с помощью угловой координаты θ, а вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}_2$ относительно оси представим в виде $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_2$, $\theta(t) = \theta_0 \cos pt$, где $\vec{e}$ — единичный вектор соответствующей оси (OX, OY, OZ).

Введем систему координат $Oxyz$, в которой поле массовых сил, действующих на твердое тело с двумя жидкостями, имеет потенциальную функцию

$$U = -\vec{g}\,\vec{r}, \quad \vec{R} = H\,\vec{e}_1 + \vec{r},$$

где H — расстояние от оси вращения до невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0; $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения (рис. 1).

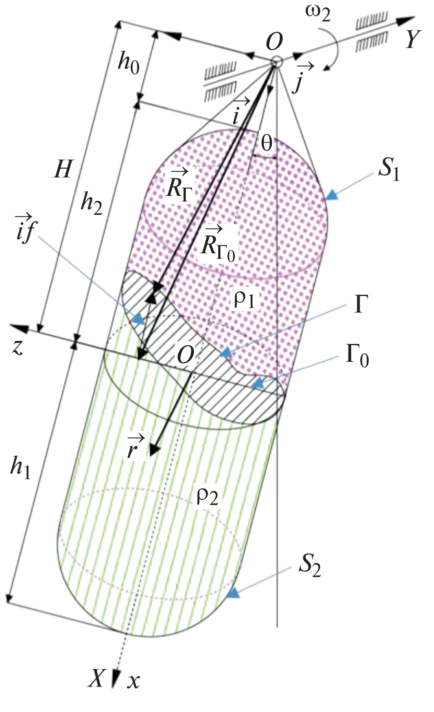

Рис. 1. Системы координат и основные обозначения для движущегося тела с двухслойной жидкостью:
$\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные векторы для осей OX и OY соответственно; f — функция (отклонение поверхности раздела); h_0, h_1, h_2 — расстояния вращения твердого тела

Рассматриваемую задачу удобно решать в цилиндрической системе координат x, r, η, связанной с декартовой x, y, z следующими формулами:

$$X = H + x, \quad y = r\cos\eta, \quad z = r\sin\eta.$$

Жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми. Смоченные поверхности полости обозначены через $S^{(k)} (k = 1, 2)$, где k — количество жидкостей; возмущенная поверхность раздела жидкостей обозначена через Γ (см. рис. 1).

Движения каждой жидкости — потенциальные и удовлетворяющие уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2\Phi^{(1)} = 0 \text{ в } \tau_1, \quad \nabla^2\Phi^{(2)} = 0 \text{ в } \tau_2. \tag{1}$$

Потенциалы скоростей $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ должны также удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях S_1, S_2

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\nu} = \vec{\omega}_2(\vec{R}\vec{\nu}) \text{ для } S_1, \quad \frac{d\Phi^{(2)}}{d\nu} = \vec{\omega}_2(\vec{R}\vec{\nu}) \text{ для } S_2; \tag{2}$$

б) кинематическим условиям на поверхности раздела

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\nu} = \frac{d\Phi^{(2)}}{d\nu} = \vec{\omega}_2(\vec{R}\vec{\nu}) + \frac{1}{N}\frac{\partial f}{\partial t} \text{ при } x = 0 \text{ на } \Gamma;$$

в) динамическим условиям на возмущенной поверхности раздела для Γ

$$\begin{gathered}\left(\rho_2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left[\rho_2(\nabla\Phi^{(2)})^2 - \rho_1(\nabla\Phi^{(1)})^2\right] - \\ -\left[\rho_2\nabla\Phi^{(2)}(\vec{\omega}_2\vec{R}) - \rho_1\nabla\Phi^{(1)}(\vec{\omega}_2\vec{R})\right] = (\rho_1 - \rho_2)\vec{g}\vec{r}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\vec{R}\big|_\Gamma = \vec{R}\big|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$; $\vec{r}\big|_\Gamma = \vec{r}\big|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$, $f = f(y, z)$ — отклонение поверхности раздела; $\vec{i}_x$ — единичный вектор для x; ∇ — градиент функции $f(y, z)$; ν — внешняя нормаль, соответствующая границе области, занимаемой жидкостями; $\vec{\nu}$ — вектор внешней нормали, соответствующей границе области, занимаемой жидкостями; $N = \sqrt{1 + (\nabla f)^2}$, $|\nabla f|$ — модуль градиента функции $f(y, z)$.

Представление решения. Представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty}\dot{\alpha}_i(t)B_i^{(k)}(x, r, \eta), \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

где $\Phi^{(k)}$ — потенциалы скоростей верхней и нижней жидкости; $A^{(k)}$ — гармонические скалярные функции; $B_i^{(k)}$ — функции координат верхней и нижней жидкости; $\dot{\alpha}_i$ — обобщенные координаты волновых движений жидкостей i-й гармоники на поверхности раздела.

Здесь и в дальнейшем суммирование по i проводится по натуральному ряду чисел от единицы до бесконечности. Верхние индексы параметров (1) и (2) относятся к верхней и нижней жидкости соответственно.

Решение поставленной нелинейной задачи в значительной степени опирается на разложение функций в ряд Тейлора и использование значений функций и ее нормальных производных на невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0. Для любой гладкой функции $F(x, r, \eta, t)$, определенной на отклоненной возмущенной поверхности раздела жидкостей Γ, имеем

$$F\big|_{\Gamma} = F\big|_{\Gamma_0} + \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_0} f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\bigg|_{\Gamma_0} f^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\bigg|_{\Gamma_0} f^3 + \ldots .$$

Представим функции $A^{(k)}$ и $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно [14, 15]:

$$A^{(k)} = A_0^{(k)} + \sum_i \alpha_i A_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j A_{ij}^{(k)} + \ldots ; \qquad (5)$$

$$B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \ldots . \qquad (6)$$

Здесь функции $A_0^{(k)}$, $A_i^{(k)}$, $A_{ij}^{(k)}$, $B_{i0}^{(k)}$, $B_{ij}^{(k)}$, $B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Подставляя разложения (5), (6) в (4) и приравнивая выражения при одинаковых степенях параметров $\alpha_i(t)$, после некоторых преобразований получим шесть линейных краевых задач:

$$\nabla^2 A_0^{(k)} = 0, \quad \frac{dA_0^{(k)}}{d\nu}\bigg|_{S_k + \Gamma_0} = (\vec{R}\vec{\nu})\vec{j}; \qquad (7)$$

$$\nabla^2 A_i^{(k)} = 0, \quad \frac{dA_i^{(k)}}{d\nu}\bigg|_{S_k} = 0;$$