

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

**ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ  
И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМЕ  
«ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»**

Учебно-методическое пособие

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета  
2012

# Содержание

<b>Лабораторные работы</b>	<b>4</b>
Лабораторная работа № 1	
Предел и непрерывность функции многих переменных . . .	4
Лабораторная работа № 2	
Дифференцирование функции многих переменных . . . . .	8
Лабораторная работа № 3	
Неявные функции и их приложения . . . . .	11
Лабораторная работа № 4	
Экстремум функции многих переменных . . . . .	16
<b>Методические указания</b>	<b>18</b>
Лабораторная работа № 1 . . . . .	18
Лабораторная работа № 2 . . . . .	21
Лабораторная работа № 3 . . . . .	26
Лабораторная работа № 4 . . . . .	36
<b>Список литературы</b>	<b>42</b>

**Задание 4.** Исследовать функцию на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных в точках  $O(0,0)$  и  $A(x_0, y_0)$  :

1.  $u = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{если } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^4 + y^4 = 0 \end{cases} \quad A(1, 2)$
2.  $u = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{если } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^4 + y^4 = 0 \end{cases} \quad A(10^{-4}, 10^{-5})$
3.  $u = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & \text{если } x + y \neq 0 \\ 0, & \text{если } x + y = 0 \end{cases} \quad A(1, -1)$
4.  $u = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad A(0, 1)$
5.  $u = \begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, & \text{если } x + y \neq 0 \\ 1, & \text{если } x + y = 0 \end{cases} \quad A\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$
6.  $u = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, & \text{если } x - y \neq 0 \\ 0, & \text{если } x - y = 0 \end{cases} \quad A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
7.  $u = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}, & \text{если } x^2 - y^2 \neq 0 \\ 1, & \text{если } x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad A(1, 0)$
8.  $u = \begin{cases} \frac{x + y}{x^3 + y^3}, & \text{если } x + y \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & \text{если } x + y = 0 \end{cases} \quad A(1, -1)$

$$9. \quad u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad A(1, -1)$$

$$10. \quad u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{x^3 + y^3}, & \text{если } x^3 + y^3 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \quad A(1, 1)$$

$$11. \quad u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y}, & \text{если } x^2 + y \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y = 0 \end{cases} \quad A(1, -1)$$

$$12. \quad u = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad A(1, -1)$$

$$13. \quad u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad A(1, 0)$$

$$14. \quad u = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad A(1, 0)$$

$$15. \quad u = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 - 2y - 4}, & \text{если } x^2 - 2y \neq 4 \\ 2, & \text{если } x^2 - 2y = 4 \end{cases} \quad A(2, 0)$$

$$16. \quad u = \begin{cases} \sin \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad A(1, 1)$$

## Лабораторная работа № 2

### Дифференцирование функции многих переменных

**Задание 1.** Исследовать, имеет ли функция  $u=u(x,y)$  частные производные в точке  $O(0,0)$  и дифференцируема ли она в этой точке:

1.  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

7.  $u = \sqrt{x^4 + y^4}$

2.  $u = \sqrt[3]{x^2 y^2}$

8.  $u = \sqrt[3]{xy}$

3.  $u = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$

9.  $u = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$

4.  $u = \sqrt[3]{x} \sin y$

10.  $u = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

5.  $u = \sqrt[3]{y} \operatorname{tg} x$

11.  $u = \arcsin(xy + \sqrt[3]{x^3 + y^3})$

6.  $u = 2y + x \cos \sqrt[3]{xy}$

12.  $u = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

$$13. \quad u = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$14. \quad u = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$15. \quad u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}, & \text{если } |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & \text{если } |x| + |y| = 0 \end{cases}$$

$$16. \quad u = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|}, & \text{если } |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & \text{если } |x| + |y| = 0 \end{cases}$$