

Министерство образования и науки Российской Федерации
Омский государственный университет

И.Д. Золотарев

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА, УПРОЩАЮЩЕГО
ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Рекомендовано Сибирским региональным отделением
учебно-методического объединения по образованию
в области энергетики и электротехники в качестве
учебного пособия для межвузовского использования
для студентов, обучающихся по направлениям
654200 «Радиотехника», 654400 «Телекоммуникации»,
645500 «Электротехника, электромеханика и электротехнология»

Издание
ОмГУ

Омск
2004

УДК 621.396.6+517.442(075)
3-81

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом ОмГУ

Рецензент – доктор технических наук, профессор, действительный член
Академии транспорта РФ (завкафедрой прикладной математики
Омского государственного университета транспорта) *В.К. Окишев*

Золотарев И.Д.

3-81 Применение метода, упрощающего обратное преобразование Лапласа при исследовании динамики колебательных систем: Учебное пособие. – Омск: Омск. гос. ун-т, 2004. – 136 с.

ISBN 5-7779-0469-6

Излагается метод исследования переходных процессов в колебательных системах, позволяющий существенно упростить наиболее трудоемкую операцию при нахождении решения дифференциального уравнения системы – обратное преобразование Лапласа. Показано, что при этом комплексный сигнал обеспечивает корректное определение огибающей и фазы реального сигнала. Наглядность получаемых решений достигается привлечением спектрального метода. Приведены примеры расчета переходных процессов при проектировании радиоустройств.

Для студентов, обучающихся по направлениям 010802 «Фундаментальная радиофизика и физическая электроника», 210301 «Радиофизика и электроника», 010800 «Радиофизика», 654200 «Радиотехника», 654400 «Телекоммуникации», 645500 «Электротехника, электромеханика и электротехнология», аспирантов, инженеров и научных сотрудников радио- и электротехнических специальностей, а также специалистов в области измерительной техники и автоматики, исследующих динамику колебательных систем.

УДК 621.396.6+517.442(075)

ISBN 5-7779-0469-6

© Золотарев И.Д., 2004
© Омский госуниверситет, 2004

ВВЕДЕНИЕ

При разработке радиоэлектронных устройств различного назначения перед инженером часто возникает задача необходимости исследования прохождения импульсных радиосигналов через линейные цепи. Для решения задачи во временной области широко используется операционное исчисление на основе интегральных преобразований Лапласа. При рассмотрении задачи в частотной области применяют спектральный метод на основе интегральных преобразований Фурье. Оба эти пути исследования тесно связаны между собой и иногда их рассматривают как единый метод (метод трансформации Фурье).

При нахождении реакции радиоэлектронного устройства (РЭУ) на импульсное возбуждение применением операционного исчисления наиболее трудоемкой операцией является выполнение обратного преобразования Лапласа (ОПЛ) [1]. Трудоемкость ОПЛ особенно возрастает для важных в радиотехнических приложениях случаев воздействия на РЭУ радиоимпульсных сигналов, а также при наличии в сигнальном тракте РЭУ избирательных фильтров (колебательных систем). Это обусловлено тем, что для радиоимпульсных сигналов и таких реализаций РЭУ изображающая функция (ИФ) исследуемой реакции системы на входное возмущение имеет комплексно-сопряженные пары (КСП) полюсов. В этих случаях даже для относительно простых ИФ существенно увеличивается трудоемкость и громоздкость преобразований при переходе из пространства изображений в пространство оригиналов по сравнению с нахождением решений для вещественных полюсов ИФ [2]. Между тем существующая тенденция предельного увеличения скорости переработки информации в радиосистемах приводит к необходимости построения РЭУ, работающих в динамическом режиме, когда преобразования сигнала, съем и обработка информативного параметра его происходят не после окончания переходных процессов (ППР) на выходе информативного канала, а в течение этих процессов. В общем случае из-за неизбежного наличия ППР при возбуждении электронной системы импульсным сигналом форма его искажается. Данные искажения приводят к разрушению информативного параметра сигнала (к возникновению соответствующих динамических ошибок работы системы).

Исследование ППР в системе с целью минимизации ошибки, вносимой переходными процессами в информативный параметр сигнала, является одним из необходимых этапов проектирования современных РЭУ, функционирующих в динамическом режиме. Поэтому проблема разработки методов, упрощающих исследование переходных процессов в радиоустройствах, всегда привлекала серьезное внимание специалистов [1–6].

Наибольшее распространение при исследовании переходных процессов в радиосистемах нашел разработанный С.И. Евтяновым метод медленно меняющихся огибающих (ММО). В данном методе существенное снижение трудоемкости получения решения линейных дифференциальных уравнений (ДУ) при исследовании ППР в колебательных системах достигается применением определенных упрощающих допущений (асимптотический метод малого параметра). При этом исходные ДУ, связывающие отклик линейной системы с возбуждающим ее радиосигналом, преобразуется к укороченным символическим уравнениям относительно ММО [2]. Чем более узкополосные сигналы и системы исследуются, тем более точными будут искомые решения, найденные методом ММО. В качестве меры узкополосности радиосигналов и систем обычно рассматривают отношения $\mu = \Delta\omega_c / \omega_n$ и $\varepsilon = 2\Delta\omega_n / \omega_p$, где $\Delta\omega_c$ – ширина спектра радиосигнала, ω_n – частота его высокочастотного (ВЧ) заполнения, $2\Delta\omega_n$ – ширина полосы пропускания колебательной системы, ω_p – резонансная частота ее. Для узкополосных сигналов и систем имеем малые параметры μ и ε ($\mu \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$). Для широкополосных и сверхширокополосных систем эти параметры сравнимы с единицей.

Метод С.И. Евтянова, хотя и позволяет существенно упростить нахождение достаточно точного решения для огибающей сигнала на выходе радиосистемы, не обеспечивает достоверного описания тонкой (фазовой) структуры выходного радиосигнала. Имея в виду богатейшие возможности и преимущества фазовых информационных радиосистем, работающих в динамическом режиме [7], отметим, что указанный недостаток метода ММО является весьма существенным.

Разработанный в [5–10] метод, упрощающий выполнение обратного преобразования Лапласа, обеспечивает такое же уменьшение трудоемкости получения решения, как и метод ММО. Однако при использовании метода [5–10] получаем точное (с точностью до фазы) описание радиосигнала на выходе исследуемой радиосистемы. При этом не требуется вводить упрощающие допущения, свойственные асимптотическим методам, в том числе и методу ММО.

Помимо резкого упрощения нахождения решения методом [5–10], его применение для важного случая исследования колебательных процессов позволяет получить описание реакции системы в форме комплексного сигнала (КС). Это облегчает проведение исследований динамических режимов радиосистем и обеспечивает большую наглядность при интерпретации полученных результатов.

Комплексный сигнал используют для определения огибающей и фазы радиосигнала. При этом модуль комплексной функции, описывающей радиосигнал, определяет огибающую, а аргумент ее – фазу радиосигнала. В качестве вещественной части КС принимается исходный физический сигнал. Но в такой постановке КС не определен, ибо можно найти бесчисленное число КС, удовлетворяющих одному и тому же вещественному сигналу. Для устранения неопределенности должен быть введен оператор, однозначно связывающий мнимую и вещественную часть КС. Огибающая и фаза, найденные из такого КС, должны соответствовать физическому содержанию этих параметров в исходном радиосигнале.

Задача однозначного определения огибающей и фазы радиосигнала является одной из фундаментальных проблем современной радиоэлектроники (проблема «Амплитуда, фаза, частота» – проблема АФЧ). В настоящее время популярным решением этой проблемы в радиоэлектронике является комплексное представление радиосигнала в форме аналитического сигнала (АС). АС определяется из исходного вещественного радиосигнала через интегральные преобразования Гильберта [11–13]. Существенным недостатком АС является некоторая неадекватность получаемых значений огибающей и фазы радиосигнала их физическому содер-

жанию. Поэтому наряду с АС рассматривались и другие формы комплексного представления радиосигнала [14–16].

Рассмотренный в данном учебном пособии метод, упрощающий ОПЛ, позволяет получить огибающую и фазу радиосигнала, адекватную их физическому представлению и для сверхширокополосных сигналов [9, 10, 17, 18]. Это важно, так как в современной радиоэлектронике наблюдается стремление перехода широкополосным и сверхширокополосным сигналам в силу их более высокой информативности [19, 20].

Приведенные примеры расчета переходных процессов в радиосистемах направлены на усвоение приложения операционного исчисления для исследования прохождения импульсных сигналов через сигнальный тракт РЭУ и, в частности, на приобретение навыка по применению метода, упрощающего ОПЛ. Общность спектрального метода и операционного исчисления обусловила целесообразность их совместного рассмотрения в данном учебном пособии.

28. Золотарев И.Д. Динамический синтез фазовых пеленгаторов в условиях повышенной скрытности источника сигналов // Синтез, передача и прием сигналов управления и связи. Воронеж, 1996. С. 97–104.
29. Деч. Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования: Пер. с нем. М.: Наука, 1971. 288 с.
30. Розенфельд А.С., Яхинсон Б.И. Переходные процессы и обобщенные функции. М.: Наука, 1966. 440 с.
31. Деруссо П., Рой, Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров): Пер. с англ. / Под ред. М.В. Меерова. М.: Наука, 1970. 620 с.
32. Алексеева В.Г. Расчет форм сигналов. М.: Энергия, 1968. 296 с.
33. Тронин Ю.В. Утеряна δ -функция! // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. Вып. 2–6. С. 408–411.
34. Zolotarev I.D. Solution of the problem «Amplitude, Phase, Frequency» in Electronics with the use of Laplace Transform // Proceeding of the Progress in Electromagnetics Research Sysposium. PIRS-97. Cambridge, Massachusetts, USA, 1997. P. 282.
35. Лэнди Р., Дэвидс Д., Альбрехт А. Справочник радиоинженера. М.: Госэнергоиздат, 1961. 704 с.
36. Золотарев И.Д. О погрешности определения огибающей и фазы Гильбертовым сигналом // Электрические и магнитные измерительные устройства: Межвуз. сб. ОмПИ. Омск, 1984. С. 117–122.
37. Smolinski A.K. On the Hilbert Envelope of a High Frequency Pulse // Bull. Acad. Pol. Sciences Techniques. 1971. V. 19. № 6. P. 473–484.
38. Zolotarev I.D. Analytical Signal for Time Truncated Functions // Proc. Of III International Conf. On Electronic Circuits. Praga, 1979. P. 216–317.
39. Вербин Ю.П. Об оценке и скорости распространения сигналов // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 8. С. 1169–1176.
40. Золотарев И.Д. Моделирование аналитическим сигналом радиоимпульса с прямоугольной огибающей // Омск. науч. вестн. 1997. Вып. 1. С. 52–55.
41. Золотарев И.Д. Проблема «Амплитуда, Фаза, Частота» и ее решение в радиотехнике // Техника радиосвязи. 1997. Вып. 3. С. 3–10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	7
1.1. Функция времени (сигнал)	7
1.2. Постановка задачи при исследовании линейных систем.....	8
2. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	11
2.1. Исходные положения	11
2.2. Прямое преобразование Лапласа	12
2.3. Обратное преобразование Лапласа	13
2.4. Изображения основных сингулярных функций.....	13
2.4.1. Изображение δ -функции	13
2.4.2. Изображение единичного скачка	15
3. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....	15
3.1. Теорема запаздывания.....	16
3.2. Теорема смещения в пространстве изображений (теорема транспозиции).....	16
3.3. Теоремы, вытекающие из линейных свойств преобразования Лапласа	17
3.4. Теорема об изображении производной функции времени	18
3.5. Теорема об изображении интеграла функции вещественной переменной.....	21
4. ИЗОБРАЖЕНИЯ СИГНАЛОВ ТИПОВЫХ ФОРМ	22
4.1. Изображение экспоненциального импульса	22
4.2. Изображение функции включения синусоидального сигнала	22
4.3. Изображение колебательного процесса с экспоненциальной огibaющей	24
4.4. Изображение сигнала, определяемого секулярной функцией.....	24
5. ИЗОБРАЖАЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ	28
6. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ	31
6.1. Импульсная реакция системы	31
6.2. Переходная характеристика системы	33
7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.....	34
7.1. Применение операционного исчисления для интегрирования линейных дифференциальных уравнений	34
7.2. Формула обращения для изображения, определяемого ДРФ.....	35

8. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ДРФ С ПРОСТЫМИ ПОЛЮСАМИ	36
9. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ИССЛЕДУЕМЫЙ ТРАКТ	51
9.1. Ряд Фурье	52
9.2. Интегральные преобразования Фурье	56
9.3. Сопоставление комплексной амплитуды и спектральной плотности, а также ряда и интеграла Фурье	59
10. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА	61
10.1. Связь между интегральными преобразованиями Фурье и преобразованиями Лапласа	61
10.2. Общность и отличия операционного исчисления и спектрального метода исследования линейных электрических цепей	66
10.2.1. Общность изображающей функции и спектральной плотности сигнала	66
10.2.2. Некоторые ограничения перехода изображение – спектральная плотность сигнала путем подстановки $p \leftrightarrow j\omega$	67
10.2.3. Переход от изображающего уравнения системы к уравнению для спектров входного и выходного сигналов	75
10.2.4. Таблицы сопоставления спектрального метода и операционного исчисления при интегрировании линейных дифференциальных уравнений	80
11. МЕТОД, УПРОЩАЮЩИЙ ВЫПОЛНЕНИЕ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА	82
11.1. Постановка задачи	82
11.2. Формула, упрощающая выполнение ОПЛ (случай простых КСП изображающей функции)	84
11.3. Примеры применения формулы обращения, упрощающей ОПЛ	87
11.4. Обоснование метода, упрощающего обратное преобразование Лапласа при исследовании динамических колебательных режимов электронных схем	98
12. КОМПЛЕКСНЫЙ СИГНАЛ И ПРОБЛЕМА «АМПЛИТУДА, ФАЗА, ЧАСТОТА» ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ	105
12.1. Постановка проблемы «амплитуда, фаза, частота» в радиоэлектронике	105
12.2. Аналитический сигнал	109

12.3. Спектр аналитического сигнала. Сопоставление спектров аналитического и комплексного сигналов	115
12.4. Новый подход в решении проблемы «Амплитуда, фаза, частота»	121
12.5. Представление АС через КС для случая произвольной амплитудно-фазовой модуляции	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	129
СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ	130
ЛИТЕРАТУРА	131

* * *

*Учебно-теоретическое издание**Илья Давыдович Золотарев*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА, УПРОЩАЮЩЕГО
ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Технический редактор *Н.В. Москвичёва*Редактор *Л.М. Кицина*

Подписано в печать 20.07.04. Формат бумаги 60х84 1/16.
Печ. л. 8,5. Усл.-печ. л. 7,9. Уч.-изд. л. 7,75. Тираж 150 экз. Заказ 396.
Издательско-полиграфический отдел ОмГУ
644077, г. Омск-77, пр. Мира, 55а, госуниверситет
