

УДК 517.983:[512.644:519.612] (035.3)  
ББК 22.143+22.162.3 я44

Ш 88

*Печатается по решению Комитета при Ученом совете  
Южного федерального университета по естественнонаучному  
и математическому направлению науки и образования  
(протокол № 10 от 9 июня 2021 г.)*

**Рецензенты:**

профессор кафедры информатики и вычислительного эксперимента  
ИММ и КН им. И. И. Воровича Южного федерального университета,  
доктор физико-математических наук *Г. В. Муратова*;  
заведующий лабораторией функционально-градиентных и композитных  
материалов научно-образовательного центра «Материалы» ДГТУ  
доктор физико-математических наук *С. М. Айзикович*

**Штейнберг, Б. Я.**

Ш 88 Алгоритмы решения систем линейных уравнений с блочно-ленточными матрицами : монография / Б. Я. Штейнберг, О. Б. Штейнберг ; Южный федеральный университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. — 138 с.

ISBN 978-5-9275-4061-7

DOI 10.18522/801287963

Монография содержит новые быстрые алгоритмы решения систем линейных уравнений с блочно-ленточными матрицами. В задачах математического моделирования часто возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности с разреженными матрицами. Во многих таких случаях матрица системы уравнений оказывается блочно-ленточной или систему уравнений можно преобразовать к эквивалентной системе с такой матрицей. Такие матрицы допускают более компактное хранение в памяти, чем разреженные матрицы общего вида. В данной работе приводятся быстрые алгоритмы решения некоторых таких систем уравнений. Эти алгоритмы опираются на особенности задачи и на особенности современных вычислительных систем. В частности, многие методы решения целевых задач с блочно-ленточными матрицами сводятся к вычислению программных циклов с линейной рекуррентной зависимостью. В данной работе приводятся новые алгоритмы распараллеливания таких рекуррентных циклов, демонстрирующие хорошее ускорение. Эти алгоритмы оказываются эффективными на новых процессорных микросхемах, имеющих большое количество вычислительных ядер.

*Работа поддержана грантом Правительства РФ № 075-15-2019-1928*

ISBN 978-5-9275-4061-7

УДК 517.983:[512.644:519.612] (035.3)

ББК 22.143+22.162.3 я44

© Южный федеральный университет, 2022

© Штейнберг Б. Я., Штейнберг О. Б., 2022

© Оформление. Макет. Издательство  
Южного федерального университета, 2022

# СОДЕРЖАНИЕ

Список сокращений.....	5
Введение.....	6
<b>1. Влияние вычислительных архитектур и компиляторов на быстроедействие алгоритмов и их программных реализаций .....</b>	<b>9</b>
1.1. Разнообразие и особенности вычислительных систем.....	9
1.2. Модели параллельных вычислений .....	16
1.3. Анализ узких мест производительности программ .....	19
1.4. Отставание развития оптимизирующих компиляторов от развития процессоров.....	20
1.5. Информационные зависимости в программе .....	22
1.6. Гнезда циклов и пространство итераций.....	24
1.7. Блочнo-ленточные матрицы.....	25
<b>2. Преобразования программ и предкомпилятор для ускорения решения СЛАУ с блочно-ленточными матрицами .....</b>	<b>29</b>
2.1. Некоторые эквивалентные преобразования программ .....	29
2.2. Предкомпилятор для ускорения алгоритмов.....	36
<b>3. О параллельных прямых алгоритмах решения СЛАУ с ленточными и блочно-ленточными матрицами .....</b>	<b>37</b>
3.1. Параллельное решение СЛАУ с двухдиагональными и блочными двухдиагональными матрицами.....	38
3.2. О последовательном алгоритме, соответствующем параллельному алгоритму решения СЛАУ с двухдиагональной матрицей.....	40
3.3. Применения алгоритма параллельного решения системы уравнения с ленточной двухдиагональной матрицей .....	43
3.4. СЛАУ с ленточными треугольными матрицами.....	45
3.5. СЛАУ с блочной трехдиагональной не треугольной матрицей .....	47
3.6. СЛАУ с ленточной матрицей с преобладанием по одной из диагоналей .....	51
3.7. Параллельное вычисление дробнолинейных рекуррентных последовательностей .....	55
3.8. Разложения трехдиагональных матриц в произведение двухдиагональных .....	57
3.9. Оценки погрешностей решения СЛАУ с двухдиагональной матрицей.....	59

<b>4. Распараллеливание рекуррентных циклов .....</b>	<b>64</b>
4.1. Рекуррентно вычисляемые переменные и рекуррентные циклы.....	64
4.2. Рекуррентно замкнутое множество отображений .....	66
4.3. Рекуррентные циклы с несколькими использованиями рекуррентно вычисляемой переменной.....	69
4.4. О циклах с нелинейной рекуррентной зависимостью .....	72
4.5. Распараллеливание циклов с рекуррентной зависимостью на общей памяти .....	75
4.6. Векторизация рекуррентных циклов .....	82
4.7. Совместное применение распараллеливания и векторизации циклов с линейной рекуррентной зависимостью .....	85
<b>5. Алгоритмы итерационного типа и их ускорение.....</b>	<b>92</b>
5.1. Итерационные алгоритмы решения СЛАУ с блочно-ленточными матрицами .....	92
5.2. Умножение и итерационное умножение блочно-ленточной матрицы на вектор .....	97
5.3. О сводимости программ, аффинно вычисляющих данные, к задачам линейной алгебры.....	99
5.4. Операторы сдвига, операторы умножения на функцию и соответствующие им матрицы .....	107
5.5. Операторы сдвига .....	109
5.6. Действия операторов сдвига на массивы и примеры соответствующих этим действиям матриц.....	114
5.7. О восстановлении алгоритма типа Гаусса-Зейделя по СЛАУ с блочно-ленточной матрицей .....	119
<b>6. Параллельные алгоритмы для вычислительных систем с распределенной памятью .....</b>	<b>122</b>
6.1. Блочно-аффинные размещения массивов в распределенной памяти.....	122
6.2. Межпроцессорные пересылки данных.....	126
6.3. Оптимальное количество процессорных элементов при параллельном вычислении массивов данных рекуррентным программным циклом.....	126
6.4. Изменение ускорения многопроцессорной вычислительной системы при повышении быстродействия процессоров .....	128
<b>Заключение.....</b>	<b>130</b>
<b>Литература .....</b>	<b>131</b>