

**Е. С. Кундышева**

# **МАТЕМАТИКА**

*Учебник для экономистов*

**4-е издание**

*Рекомендовано*

*Учебно-методическим объединением  
по образованию в области экономики  
и экономической теории в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки  
“Экономика”*

Москва  
2015

УДК 51  
ББК 22.1  
К91

**Рецензенты:**

*Б. С. Касаев* — член-корреспондент РАЕН, проректор по научной работе ИНЭП, почетный работник ВПО РФ, доктор экономических наук, профессор;

*Ю. Н. Павловский* — член-корреспондент Российской академии наук (ВЦ РАН), доктор физико-математических наук, профессор (МФТИ).

**Кундышева Е. С.**

**К91**

Математика: Учебник для экономистов/Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 564 с.

ISBN 978-5-394-02261-6

В учебнике на простейшем уровне изложены необходимые экономистам основы высшей математики, на которых базируются экономико-математические методы и строятся математические модели рыночной экономики.

Основные положения учебного материала сопровождаются большим количеством примеров и задач из области корпоративного управления, макро- и микроэкономики с соответствующими упражнениями, контрольными вопросами для самостоятельной работы.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент», «Торговое дело».

---

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 20.06.2014. Формат 60×84 1/16  
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 35,25.  
Тираж 500 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»  
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.

Тел./факс: 8(495) 741-34-28,

E-mail: [sales@dashkov.ru](mailto:sales@dashkov.ru) — отдел продаж;  
<http://www.dashkov.ru>

Отпечатано в ГУП Академиздатцентр «Наука» РАН,  
ОП «Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ»-«Наука»,  
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.

Тел./факс: 554-21-86, 554-25-97, 974-69-76

ISBN 978-5-394-02261-6

© Кундышева Е. С., 2007

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ .....</b>	<b>6</b>
§ 1. Векторные пространства и матрицы .....	6
1.1. Основные сведения о векторах и векторных пространствах .....	6
1.2. Основные сведения о матрицах .....	14
1.3. Операции над матрицами .....	18
1.4. Собственные значения и собственные векторы матрицы .....	24
§ 2. Определители квадратных матриц .....	26
2.1. Основные определения .....	27
2.2. Свойства определителей .....	32
§ 3. Обратная матрица .....	39
§ 4. Ранг матрицы .....	42
§ 5. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений .....	55
5.1. Основные понятия и определения .....	55
5.2. Решение системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными. Теорема Крамера и метод обратной матрицы .....	57
5.3. Методы Гаусса и Жордана-Гаусса .....	62
5.4. Решение систем общего вида .....	68
5.5. Разложение вектора по базису .....	72
5.6. Приведенная система. Фундаментальная система решений .....	76
5.7. Характеристическое уравнение .....	79
§ 6. Модель Леонтьева межотраслевого баланса .....	82
<i>Контрольные вопросы .....</i>	<i>84</i>
<i>Упражнения .....</i>	<i>85</i>
<i>Ответы к упражнениям .....</i>	<i>88</i>

## Глава 2. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ..... 89

§ 1. Прямые линии и плоскости .....	89
1.1. Основные понятия об уравнениях .....	89
1.2. Уравнение прямой на плоскости .....	92
1.3. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой .....	98
1.4. Уравнение плоскости .....	103
1.5. Уравнение прямой линии в пространстве .....	107
1.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве .....	109
§ 2. Кривые второго порядка .....	110
2.1. Эллипс и окружность .....	110
2.2. Гипербола и парабола .....	113
2.3. Примеры решения задач .....	119
2.4. Кривые спроса и предложения. Точка равновесия .....	124
<i>Контрольные вопросы</i> .....	127
<i>Упражнения</i> .....	127
<i>Ответы к упражнениям</i> .....	128

## Глава 3. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ..... 129

§ 1. Постановка задачи линейного программирования в экономике .....	129
§ 2. Графический метод решения задачи линейного программирования .....	134
§ 3. Примеры построения экономических моделей .....	139
§ 4. Задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами. Переход от нее к основной задаче линейного программирования и наоборот .....	150
§ 5. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования .....	156
§ 6. Отыскание опорного решения основной задачи линейного программирования .....	168

§ 7. Отыскание оптимального решения основной задачи линейного программирования .....	176
§ 8. Транспортная задача линейного программирования .....	185
§ 9. Нахождение опорного плана .....	191
§ 10. Улучшение плана перевозок. Цикл пересчета .....	197
§ 11. Двойственность в линейном программировании ...	206
11.1. Понятие двойственности .....	206
11.2. Несимметричные двойственные задачи .....	208
11.3. Симметричные двойственные задачи .....	210
11.4. Виды математических моделей .....	211
<i>Контрольные вопросы</i> .....	213
<i>Упражнения</i> .....	213

#### **Глава 4. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ..... 215**

§ 1. Множества и операции над ними .....	215
1.1. Основные определения .....	215
1.2. Арифметическое $m$ -мерное пространство .....	218
§ 2. Бюджетные и производственные множества .....	220
2.1. Определение бюджетного множества .....	220
2.2. Производственные множества и их свойства ...	222
§ 3. Числовые последовательности .....	224
3.1. Числовые последовательности и операции над ними .....	224
3.2. Ограниченные и неограниченные последовательности .....	225
3.3. Предел последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности .....	226
3.4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей .....	227
§ 4. Сходящиеся последовательности .....	228
4.1. Понятие сходящейся последовательности .....	228
4.2. Основные свойства сходящихся последовательностей .....	229

§ 5. Монотонные последовательности .....	232
5.1. Определение монотонных последовательностей .....	232
5.2. Признак сходимости монотонной последовательности. Формула сложных процентов .....	233
§ 6. Понятие функции .....	238
6.1. Определение функциональной зависимости. Способы задания функции .....	238
6.2. Некоторые свойства функций .....	240
6.3. Производственная функция и функция полезности .....	241
§ 7. Предел функции .....	245
7.1. Предел функции в бесконечности .....	245
7.2. Предел функции в точке .....	246
7.3. Основные свойства предела функции .....	247
§ 8. Два замечательных предела .....	248
8.1. Первый замечательный предел .....	248
8.2. Второй замечательный предел .....	249
§ 9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции .....	251
§ 10. Непрерывность функции .....	259
10.1. Определение непрерывной функции. Точки разрыва. Асимптоты .....	259
10.2. Обратная функция .....	265
§ 11. Комплексные числа. Функции комплексного переменного .....	267
11.1. Основные определения .....	267
11.2. Геометрическая интерпретация .....	269
11.3. Тригонометрическая форма комплексного числа .....	270
11.4. Свойства показательной функции .....	271
11.5. Степени и корни .....	271
§ 12. Производная и дифференциал функции .....	274
12.1. Определение производной .....	274
12.2. Основные правила дифференцирования .....	276

12.3. Производная сложной и обратной функций ....	280
12.4. Дифференциал функции .....	281
12.5. Геометрический смысл дифференциала функции .....	282
12.6. Производные комплекснозначных функций действительного аргумента .....	283
§ 13. Некоторые приложения производной .....	284
13.1. Производные высших порядков .....	284
13.2. Дифференциальные теоремы о среднем .....	286
13.3. Формула Тейлора для многочлена .....	290
13.4. Разложение произвольной функции .....	291
§ 14. Построение графиков функций .....	294
14.1. Правило Лопиталю .....	294
14.2. Возрастание и убывание функций .....	295
14.3. Экстремум функции .....	296
14.4. Выпуклость функции. Точки перегиба .....	298
14.5. Общая схема исследования функций и построение их графиков .....	300
14.6. Теорема о пересечении предельных и средних издержек .....	302
§ 15. Модели экономического взаимодействия на простейших рынках .....	305
15.1. Паутинообразная модель рынка .....	305
15.2. Модель Солоу экономического роста .....	310
§ 16. Понятие функции нескольких переменных. Модель фирмы .....	313
16.1. Функция $m$ переменных и область ее определения .....	313
16.2. Предел функции нескольких переменных ...	314
§ 17. Дифференцирование функций нескольких переменных. Производная по направлению градиента .....	315
17.1. Частные производные .....	315
17.2. Полное приращение функции .....	315
17.3. Полный дифференциал .....	316
17.4. Поверхности уровня .....	318

17.5. Производная по направлению .....	319
17.6. Градиент .....	321
17.7. Производственная функция Кобба-Дугласа .....	323
17.8. Теория фирмы .....	324
§ 18. Неопределенный интеграл .....	328
§ 19. Некоторые свойства неопределенного интеграла .....	331
19.1. Основные правила вычисления неопределенного интеграла .....	331
19.2. Интегрирование методом замены переменной .....	332
19.3. Интегрирование по частям .....	333
19.4. Метод неопределенных коэффициентов .....	334
§ 20. Определенный интеграл .....	336
20.1. Определение определенного интеграла .....	336
20.2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница .....	338
§ 21. Некоторые приложения интегрального исчисления .....	341
21.1. Классическая модель Вильсона управления запасами .....	341
21.2. Несобственные интегралы .....	343
21.3. Примеры вычисления площадей плоских фигур .....	346
21.4. Приближенное вычисление определенных интегралов .....	348
§ 22. Дифференциальные уравнения .....	352
22.1. Понятие о дифференциальном уравнении и его решении .....	352
22.2. Линейные уравнения первого порядка .....	357
22.3. Уравнение Бернулли .....	358
22.4. Дифференциальные уравнения второго порядка .....	360
§ 23. Числовые ряды .....	361
23.1. Понятие ряда. Признаки сходимости рядов .....	361



23.2. Знакочередующиеся ряды.	
Их признаки сходимости .....	376
23.3. Степенной ряд и область его сходимости ...	379
23.4. Современная стоимость денег,	
дисконтирование .....	384
<i>Контрольные вопросы</i> .....	391
<i>Упражнения</i> .....	391
<i>Ответы к упражнениям</i> .....	395

<b>Глава 5. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ</b> .....	398
§ 1. Основные понятия теории вероятностей .....	398
1.1. Опыт и события .....	398
1.2. Определение вероятности события .....	402
1.3. Комбинаторика .....	404
1.4. Примеры вычисления вероятностей .....	407
1.5. Относительная частота .....	411
§ 2. Основные теоремы теории вероятностей .....	413
2.1. Теорема сложения вероятностей .....	413
2.2. Теорема умножения вероятностей .....	415
2.3. Вероятности гипотез и формулы полной вероятности .....	423
§ 3. Случайные величины .....	427
3.1. Определение случайной величины .....	427
3.2. Определение функции распределения .....	427
3.3. Дискретные и непрерывные случайные величины .....	428
3.4. Свойства функции распределения вероятностей случайной величины .....	429
3.5. Закон распределения дискретной случайной величины .....	430
3.6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины .....	434
§ 4. Числовые характеристики случайных величин ....	438
4.1. Числовые характеристики дискретных случайных величин .....	438

4.2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин .....	447
§ 5. Некоторые специальные распределения случайных величин .....	449
§ 6. Некоторые аспекты из области математической статистики .....	460
6.1. Основные задачи математической статистики. Измерение риска, присущего инвестиционному портфелю .....	460
6.2. Оценивание параметров .....	474
6.3. Проверка гипотез .....	480
§ 7. Математическая модель прогнозирования экономических процессов .....	483
7.1. Экономическое прогнозирование .....	483
7.2. Методы прогнозирования .....	485
7.3. Статистический анализ временных рядов .....	487
7.4. Кривые роста .....	487
<i>Контрольные вопросы</i> .....	495
<i>Упражнения</i> .....	496
<i>Ответы к упражнениям</i> .....	500

<b>Глава 6. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ</b> .....	502
§ 1. Оптимизационные задачи на графах .....	502
1.1. Основные понятия теории графов .....	502
1.2. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера .....	508
§ 2. Моделирование экономических процессов по схеме марковских случайных процессов .....	516
2.1. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями .....	516
2.2. Случайные процессы с дискретным и непрерывным временем. Марковская цепь ...	521
§ 3. Некоторые аспекты теории игр .....	528
3.1. Основные понятия математической теории игр .....	528

3.2. Решение матричных антагонистических игр ...	531
3.3. Кооперативные и некооперативные игры .....	534
3.4. Связь теории игр с анализом проблем микроэкономики .....	536
<i>Контрольные вопросы</i> .....	539
<i>Упражнения</i> .....	539
<i>Ответы к упражнениям</i> .....	541
<b>Контрольные работы для студентов заочной и очно-заочной форм обучения</b> .....	543
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	552