

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729
3-80

Золотарёва Н. Д.

3-80 Алгебра. Основной курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — 2-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2022. — 581 с. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-955-8

Настоящее пособие составлено на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова и задач Единого государственного экзамена преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729

Деривативное издание на основе печатного аналога: Алгебра. Основной курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2018. — 576 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-00101-139-2.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

© Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В., 2018
© Лаборатория знаний, 2018

ISBN 978-5-00101-955-8

Оглавление

| | |
|------------------------|---|
| От редактора | 7 |
| Предисловие | 8 |

Часть I. Теория и задачи 11

| | |
|--|----|
| 1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства | 11 |
| 1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений | 11 |
| 1.2. Сравнение чисел | 14 |
| 1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем | 15 |
| 1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета | 19 |
| 2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений | 23 |
| 2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов | 23 |
| 2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений | 26 |
| 2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 29 |
| 2.4. Смешанные задачи | 33 |
| 3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения | 34 |
| 3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы двойного и половинного аргументов | 34 |
| 3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению | 37 |
| 3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим | 40 |
| 3.4. Различные задачи на отбор корней | 44 |
| 4. Стандартные текстовые задачи | 46 |
| 4.1. Пропорциональные величины | 46 |
| 4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии | 48 |
| 4.3. Скорость, движение и время | 51 |
| 4.4. Работа и производительность | 55 |
| 4.5. Проценты, формула сложного процента | 56 |
| 5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства | 58 |
| 5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений | 58 |
| 5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 62 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.3. | Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 66 |
| 5.4. | Смешанные задачи | 70 |
| 6. | Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций | 71 |
| 6.1. | Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента | 71 |
| 6.2. | Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений | 74 |
| 6.3. | Системы тригонометрических уравнений | 77 |
| 6.4. | Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства | 82 |
| 7. | Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов | 86 |
| 7.1. | Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков | 86 |
| 7.2. | Плоские геометрические фигуры, применение метода координат | 91 |
| 7.3. | Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств | 93 |
| 8. | Элементы математического анализа | 96 |
| 8.1. | Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций | 96 |
| 8.2. | Исследование функций с помощью производной | 100 |
| 8.3. | Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной | 104 |
| 9. | Текстовые задачи | 108 |
| 9.1. | Скорость, движение и время | 108 |
| 9.2. | Арифметическая и геометрическая прогрессии | 110 |
| 9.3. | Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли | 113 |
| 9.4. | Целые числа, перебор вариантов, отбор решений | 116 |
| 10. | Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов | 119 |
| 10.1. | Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями | 119 |
| 10.2. | Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях | 124 |
| 10.3. | Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах | 127 |
| 11. | Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов | 129 |
| 11.1. | Понятие расщепления, равносильные преобразования | 129 |
| 11.2. | Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах | 132 |
| 11.3. | Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов | 136 |
| 11.4. | Смешанные задачи | 140 |

| | |
|--|------------|
| Часть II. Указания и решения | 143 |
| 1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства | 143 |
| 1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений | 143 |
| 1.2. Сравнение чисел | 149 |
| 1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем | 154 |
| 1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета | 160 |
| 2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений | 168 |
| 2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов | 168 |
| 2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений | 179 |
| 2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 184 |
| 2.4. Смешанные задачи | 199 |
| 3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения | 218 |
| 3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента, формулы двойного и половинного аргументов | 218 |
| 3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению | 223 |
| 3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим | 232 |
| 3.4. Различные задачи на отбор корней | 243 |
| 4. Стандартные текстовые задачи | 256 |
| 4.1. Пропорциональные величины | 256 |
| 4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии | 259 |
| 4.3. Скорость, движение и время | 271 |
| 4.4. Работа и производительность | 281 |
| 4.5. Проценты, формула сложного процента | 285 |
| 5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства | 290 |
| 5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений | 290 |
| 5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 298 |
| 5.3. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 311 |
| 5.4. Смешанные задачи | 329 |
| 6. Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций | 343 |
| 6.1. Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента | 343 |

| | | |
|---|--|------------|
| 6.2. | Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений | 351 |
| 6.3. | Системы тригонометрических уравнений | 356 |
| 6.4. | Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства | 371 |
| 7. | Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов | 380 |
| 7.1. | Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков | 380 |
| 7.2. | Плоские геометрические фигуры, применение метода координат | 388 |
| 7.3. | Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств | 397 |
| 8. | Элементы математического анализа | 408 |
| 8.1. | Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций | 408 |
| 8.2. | Исследование функций с помощью производной | 411 |
| 8.3. | Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной | 419 |
| 9. | Текстовые задачи | 425 |
| 9.1. | Скорость, движение и время | 425 |
| 9.2. | Арифметическая и геометрическая прогрессии | 433 |
| 9.3. | Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли | 441 |
| 9.4. | Целые числа, перебор вариантов, отбор решений | 450 |
| 10. | Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов | 460 |
| 10.1. | Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями | 460 |
| 10.2. | Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях | 472 |
| 10.3. | Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах | 482 |
| 11. | Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов | 492 |
| 11.1. | Понятие расщепления, равносильные преобразования | 492 |
| 11.2. | Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах | 504 |
| 11.3. | Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов | 520 |
| 11.4. | Смешанные задачи | 534 |
| Варианты ДВИ МГУ последних лет | | 555 |
| Ответы | | 562 |
| Список литературы | | 576 |