МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Т. Н. Глушакова, К. П. Лазарев, Ю. В. Бондаренко

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебно-методическое пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

СОДЕРЖАНИЕ

ŋqdqʎeɤ bɆ dəqƎƃɤɜə d ɛɔɑɓɔʎ ɟqdqɤqʎè

С помощью скалярного произведения можно ввести понятие угла между векторами:

$$\cos\phi = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}}.$$

Из (4) следует, что $\dfrac{(x,y)^2}{(x,x)\cdot(y,y)} \le 1$, поэтому $\dfrac{|(x,y)|}{\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}} \le 1$, откуда следует, что $|\cos\phi| \le 1$.

Определение 4. Линейное пространство E называется **нормированным**, если для любого элемента $x \in E$ определена числовая характеристика – норма вектора $\|x\|$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\|x\| \ge 0$ при $x \ne 0$ и $\|x\| = 0$ при $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для любых $\lambda \in \mathrm{R}$;

3) для любых $x, y \in E$ $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Теорема 2. Евклидово пространство нормировано, если в нем определена норма вектора по формуле $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Доказательство.

1. Для любого ненулевого вектора $x \in E$ $\|x\| = \sqrt{(x,x)} > 0$, для $x = 0$ $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0$.

2. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

3. $\|x + y\|^2 = \left(\sqrt{(x+y, x+y)}\right)^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

С помощью нормы понятие угла между векторами вводится следующим образом:

$$\cos\phi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

Замечание. Если $x = y$, то $\cos\phi = 1$.

Определение 5. Два вектора $x, y \in E$ называются **ортогональными**, если $(x,y) = 0$.

Теорема 3 (теорема Пифагора). Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство.

Пусть x, y – ортогональные векторы, то есть $(x,y) = 0$. Рассмотрим

$$\|x + y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = (x,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

ђdddуеҮ ЬЁ dеdЁbҮзе d есаесу Јdddүqуè

Следствие. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – совокупность взаимно перпендикулярных векторов, то есть

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \|x_i\|^2 \neq 0, & i = j \end{cases},$$

тогда

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_k\|^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k, x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = (x_1, x_1) + \\ +(x_1, x_2) + \ldots + (x_k, x_k) = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_k\|^2.$$

Определение 6. Система векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E$ **ортонормирована,** если $(f_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Определение 7. δ_{ij} называется **символом Кронекера**.

Утверждение 2. Если векторы f_i $(i = 1, \ldots, n)$ образуют ортонормированную систему, то они линейно независимы.

Доказательство.

Предположим противное: векторы f_i $(i = 1, \ldots, n)$ линейно зависимы, то есть существует такой нетривиальный (ненулевой) набор коэффициентов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, что линейная комбинация

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = 0. \tag{8}$$

Умножим (8) скалярно на f_i $(i = 1, \ldots, n)$, получим

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n, f_i) = (\alpha_1 f_1, f_i) + \ldots + (\alpha_i f_i, f_i) + \ldots + (\alpha_n f_n, f_i) = \alpha_i.$$

С другой стороны, $(0, f_i) = 0$. Таким образом, $\alpha_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, что противоречит предположению.

Теорема 4. В n-мерном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.

Доказательство проведем методом математической индукции.

Пусть $\dim E = 1$, f_1 – ненулевой базисный вектор. Положим $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$, тогда $\|e_1\| = \left\| \frac{f_1}{\|f_1\|} \right\| = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot \|f_1\| = 1$. Пусть в произвольном пространстве E' размерности $(n-1)$ построен ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ и $E' \subset E$, $\dim E = n$.

Докажем, что в n-мерном пространстве E также можно построить ортонормированный базис. Возьмем вектор $f_n \in E$, $f_n \notin E'$. Спроектируем вектор f_n на E'. Положим $f_n = y_n + h_n$, где $y_n \in E'$, $h_n \perp E'$. Так как $y_n \in E'$, то $y_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} e_{n-1}$. Подберем коэффициенты α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

таким образом, чтобы $h_n = f_n - y_n \perp E'$ или $h_n \perp e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Для этого скалярно умножим h_n на векторы e_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Получим

$$0 = (h_n, e_i) = (y_n - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}), e_i) = (y_n, e_i) -$$
$$-\alpha_1 (e_1, e_i) - \ldots - \alpha_i (e_i, e_i) - \ldots - \alpha_{n-1}(e_{n-1}, e_i) = (y_n, e_i) - \alpha_i .$$

В результате $\alpha_i = (y_n, e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Положим $e_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$.

Таким образом, в пространстве E построен ортонормированный базис e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1.4. Матрица Грама

1.4.1. Определение матрицы Грама

Выведем формулу для скалярного произведения в общем случае.

Пусть E – n-мерное евклидово пространство, $e_1, \ldots, e_n$ – базис в E. Возьмем произвольные векторы $x, y \in E$. Пусть $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n$. Найдем

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (e_i, e_j) \xi_i \eta_j . \tag{9}$$

Пусть $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Из (9) следует, что

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \xi_i \eta_j = \xi^{\mathrm{T}} \Gamma \eta ,$$

где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \ldots \\ \eta_n \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение 8. Матрица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей Грама**.

Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $\Gamma = I$ и

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j = \xi^{\mathrm{T}} \eta .$$

1.4.2. Свойства матрицы Грама

1. Матрица Грама – симметрическая.

Действительно, так как $(x, y) = (y, x)$, то $g_{ij} = (e_i, e_j) = (e_j, e_i) = g_{ji}$.

2. Найдем связь матриц Грама в разных базисах.

Пусть E – n-мерное евклидово пространство, $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{e'_j\}_{j=1}^n$ – базисы в E. Разложим базисные векторы e'_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ по векторам e_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, получим $e'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ki} e_k$. Элементы s_{ki} образуют матрицу перехода $S = \{s_{ki}\}_{k,i=1}^n$ от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

Пусть $\Gamma = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$ – матрица Грама в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\Gamma' = \{g'_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $g'_{ij} = (e'_i, e'_j)$ – матрица Грама в базисе $\{e'_j\}_{j=1}^n$, тогда

$$g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^{n} s_{ki} e_k, \sum_{m=1}^{n} s_{mj} e_m) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} s_{ki} (e_k, e_m) s_{mj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} s_{ki} g_{km} s_{mj}. \qquad (10)$$

Перепишем соотношение (10) в матричном виде:

$$\Gamma' = S^{\mathrm{т}} \Gamma S, \qquad (11)$$

тогда

$$|\Gamma'| = |S^{\mathrm{т}}| \cdot |\Gamma| \cdot |S| = |S|^2 \cdot |\Gamma|. \qquad (12)$$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $|\Gamma| = 1$ и из (12) следует, что

$$|\Gamma'| = |S|^2 > 0. \qquad (13)$$

Теорема 5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные элементы n-мерного евклидова пространства E, тогда

$$\Gamma^* = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x, x) & (x, x) & \ldots & (x, x) \end{vmatrix} > 0,$$

если векторы x_i $(i=1, \ldots, k)$ линейно независимы, и $\Gamma^* = 0$, если векторы x_i $(i=1, \ldots, k)$ линейно зависимы.

Доказательство.

1. Пусть x_i $(i=1, \ldots, k)$ – линейно независимые векторы пространства E, E' – линейная оболочка, натянутая на векторы x_i $(i=1, \ldots, k)$. Возьмем в качестве векторов нового базиса векторы x_i $(i=1, \ldots, k)$, а в качестве векторов старого базиса – ортонормированные базисные векторы e_j $(j=1, \ldots, k)$ пространства E. Тогда в силу (13) $|\Gamma^*| > 0$.

2. Пусть векторы x_i $(i=1, \ldots, k)$ линейно зависимы, тогда существует такой нетривиальный набор коэффициентов

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \neq 0, \qquad (14)$$

что линейная комбинация

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \theta \qquad (15)$$

(θ – нулевой элемент пространства E).

Умножим (15) скалярно на x_i $(i = 1, \ldots, k)$, получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1(x_1, x_1) + \alpha_2(x_2, x_1) + \ldots + \alpha_k(x_k, x_1) = 0 \\ \alpha_1(x_1, x_2) + \alpha_2(x_2, x_2) + \ldots + \alpha_k(x_k, x_2) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1(x_1, x_k) + \alpha_2(x_2, x_k) + \ldots + \alpha_k(x_k, x_k) = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

Числа α_i $(i = 1, \ldots, k)$ являются решениями линейной однородной системы (16). Если бы ее определитель $|\Gamma^*|$ был отличен от нуля, то по правилу Крамера система (16) имела бы только нулевое решение, что противоречит предположению (14).

Пример. Пусть в 3-мерном евклидовом пространстве дан канонический базис $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Построить в этом базисе матрицу Грама для следующей билинейной формы:

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 + 6 x_3 y_3 + 2 x_1 y_3 + 2 x_3 y_1 + 3 x_2 y_3 + 3 x_3 y_2 .$$

Решение.

$$g_{11} = b(e_1, e_1) = 1, \qquad g_{12} = g_{21} = b(e_1, e_2) = 0, \qquad g_{13} = g_{31} = b(e_1, e_3) = 2,$$

$$g_{22} = b(e_2, e_2) = 5, \qquad g_{23} = g_{32} = b(e_2, e_3) = 3, \qquad g_{33} = b(e_3, e_3) = 6,$$

тогда

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.5. Ортогональные матрицы

Пусть E – n-мерное евклидово пространство, $\{e_i\}$, $\{e_i'\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ – ортонормированные базисы пространства E, тогда Γ и Γ' – единичные матрицы и в силу (11)

$$I = S^{\text{т}} \cdot S, \qquad (17)$$

где $S = \{s_{ki}\}_{k,i=1}^{n}$ – матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ к базису $\{e_j'\}_{j=1}^{n}$.

Из (17) следует, что $S^{-1} = S^{\text{т}}$.

Определение 9. Матрица S называется **ортогональной**, если

$$S^{\text{т}} = S^{-1}. \qquad (18)$$

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqdɖɏqɏè