

УДК 531.01  
ББК 22.21  
Т 45

*Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом  
Северного (Арктического) федерального университета*

*Рецензенты:*

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической  
физики САФУ им. М.В. Ломоносова **М.К. Есеев**;  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры микросистемной  
техники и цифровых технологий САФУ им. М.В. Ломоносова  
**Тягунин А.В.**

**Титов, А.К.**

Т45 Численное моделирование механического движения: учебное по-  
собие / А.К. Титов; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова  
(Архангельск). – Архангельск: САФУ, 2017. –118 с.  
ISBN 978-5-261-01162-0

Рассмотрены вопросы численного моделирования механического  
движения. Изложены основы математических методов моделирования  
в механике. Приведены примеры численного моделирования, реали-  
зованные в среде Mathcad.

Предназначено для студентов инженерно-технических специаль-  
ностей и преподавателей-физиков.

УДК 531.01  
ББК 22.21

ISBN 978-5-261-01162-0

© Титов А.К., 2017  
© Северный (Арктический)  
федеральный университет  
им. М.В. Ломоносова, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	4
1. Прямая и обратная задачи механики. Задача Коши и краевые задачи.....	4
1.2. Второй закон Ньютона .....	8
1.3. Первые интегралы движения. Общие теоремы механики.....	11
1.4. Уравнения динамики абсолютно твердого тела .....	17
1.5. Уравнения Лагранжа 2-го рода .....	23
1.6. Уравнения Гамильтона.....	28
2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ.....	32
2.1. Решение нелинейных уравнений .....	33
2.2. Алгоритмы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений .....	39
3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВОЗДУХА .....	54
3.1. Математическая модель движения .....	54
3.2. Моделирование движения в среде Mathcad .....	56
4. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ .....	59
4.1. Задача двух тел.....	59
4.2. Центральное-симметричное поле .....	61
4.3. Дифференциальные уравнения движения.....	62
4.4. Качественный анализ движения частицы в центральном поле .....	65
4.5. Движение в кулоновском поле (гравитационное поле Земли) .....	66
4.6. Пример трехмерного отображения орбит в Mathcad .....	69
4.7. Движение в поле Леннарда–Джонса .....	73
5. ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ДВУХ СИЛОВЫХ ЦЕНТРОВ.....	79
5.1. Математическая модель движения тела в поле двух неподвижных центров .....	79
5.2. Вычисления в Mathcad .....	82
5.3. Движение в неинерциальной системе отсчета .....	85
5.4. Вычисления в MathCAD для неинерциальной системы отсчета.....	89

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ .....	94
6.1. Математическая модель физического маятника .....	94
6.2. Моделирование движения стержня с закрепленной осью .....	96
6.3. Вынужденные колебания пружинного маятника .....	99
6.4. Численное моделирование колебаний пружинного маятника .....	101
6.5. Анимация вынужденных колебаний груза на пружине .....	104
7. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА .....	109
7.1. Математическая модель колебаний двойного маятника .....	109
7.2. Анимационная модель движения плоского двойного маятника ....	111
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	116