«Оптика атмосферы и океана», **26**, № 1 (2013)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 535.32/58

Распространение широкополосных световых пучков

В.А. Банах, Л.О. Герасимова*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 20.06.2012 г.

Рассмотрено распространение широкополосных импульсных световых гауссовых пучков в однородной среде при различных условиях дифракции на передающей апертуре. Показано, что при любых радиусах кривизны начального волнового фронта дифракционное уширение импульсного пучка уменьшается с уменьшением длительности импульса и в предельном случае «нулевой» длительности импульса дифракционное расплывание пучка отсутствует.

Ключевые слова: дифракция, гауссов световой пучок, δ-импульс; diffraction, Gaussian optical beam, delta-pulse.

Введение

Исследованию оптики коротких импульсов в последние годы уделяется все большее внимание [1–3]. В частности, проводится анализ распространения широкополосных световых импульсов [3–8]. В [4, 5] расчеты дифракции импульсов фемтосекундной длительности проведены для режима дальней зоны. В [7, 8] рассмотрены средняя интенсивность и степень пространственно-временной когерентности частично когерентных световых импульсных пучков без ограничения на режим дифракции и показано, что с уменьшением длительности импульса уменьшается дифракционное уширение светового пучка и улучшается его пространственная когерентность.

В [9] дан анализ амплитуды импульсных сфокусированных световых пучков в плоскости фокуса и сделан вывод, что в предельном случае «нулевой» длительности импульса (δ-импульса) амплитуда поля пучка в фокусе неограниченно возрастает, т.е. сфокусированный δ-импульсный пучок не испытывает дифракции. Однако вопрос о том, что происходит с дифракцией сфокусированных δ-импульсных пучков на расстояниях, не совпадающих с фокальной плоскостью, а также коллимированных и расходящихся δ-импульсных световых пучков с широким временным спектром, остался за пределами результатов [9].

В настоящей статье представлены данные расчета дифракции широкополосных импульсных световых пучков при различных соотношениях между радиусом кривизны волнового фронта пучка и длиной трассы распространения.

1. Основные соотношения

Решение волнового уравнения, описывающего распространение электромагнитного поля $E(\mathbf{r},t)$ в однородной среде

$$\Delta E(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — трехмерный вектор в пространстве; t — время; c — скорость света, можно представить в виде разложения по плоским волнам [10]:

$$E(x,\rho,t) = \int d\omega\, \mathrm{e}^{-i\omega t} \int d\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{e}^{-i\kappa\rho} Q_0(\boldsymbol{\kappa},\omega) \times$$
$$\times \exp\left\{ix\left[(\omega/c)^2 - \kappa^2\right]^{1/2}\right\}. \qquad (2)$$

В (2) считается, что поле E распространяется вдоль оси x; $\boldsymbol{\rho} = \{y, z\}$ — вектор в поперечной к направлению распространения плоскости; $\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_y, \kappa_z\}$ – двумерная пространственная частота; ω — временная частота;

$$Q_0(\boldsymbol{\kappa},\omega) = Q(x = 0, \boldsymbol{\kappa}, \omega) = F(\boldsymbol{\kappa})P(\omega) \qquad (3)$$

— пространственно-временной спектр напряженности электрического поля $Q(x, \boldsymbol{\kappa}, \omega)$ в начальной плоскости $x = 0$, где поле задается в факторизованном виде $E(x = 0, y, z, t) = E_0(\boldsymbol{\rho}, t) = U_0(\boldsymbol{\rho})G(t)$. Пары $U_0(\boldsymbol{\rho})$, $F(\boldsymbol{\kappa})$ и $G(t)$, $P(\omega)$ связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$F(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho\, U_0(\boldsymbol{\rho})\, \mathrm{e}^{i\kappa\rho}; \qquad (4)$$

* Виктор Арсентьевич Банах (banakh@iao.ru); Лилия Олеговна Герасимова (lilian@sibmail.com).

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt\, \mathrm{e}^{i\omega t} G(t). \qquad (5)$$

Зададим начальное распределение когерентного импульсного пучка гауссовым в пространстве и во времени:

$$U_0(\rho) = U_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - ik\frac{\rho^2}{2F}\right); \qquad (6)$$

$$G(t) = G_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2} - i\omega_0 t\right), \qquad (7)$$

где a и F соответственно эффективный радиус и радиус кривизны фазового фронта пучка; $k = \omega/c$; T – длительность импульса; ω_0 — несущая частота.

Выполним интегрирование в (4), (5) с использованием (6), (7) и подставим полученные таким образом выражения для $F(\kappa)$ и $P(\omega)$ в (3), а (3) в (2). В результате получим

$$E(x,\rho,t) = \frac{TU_0G_0a^2}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathrm{e}^{-i\omega t} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}T^2\right] \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1 + i\Omega\dfrac{x}{F}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{e}^{-i\kappa\rho} \exp\left[-\kappa^2 \frac{a^2}{2\left(1 + i\Omega(x/F)\right)}\right] \times$$

$$\times \exp\left[ix(k^2 - \kappa^2)^{1/2}\right], \qquad (8)$$

где $\Omega = ka^2/x$.

Путем прямой подстановки (8) в (1) и выполнения соответствующих дифференцирований можно убедиться, что (8) является решением уравнения (1).

При $T \to \infty$ часть подынтегрального выражения в (8) можно аппроксимировать δ-функцией

$$\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}T^2\right] \to \delta(\omega - \omega_0)$$

и получить выражение для напряженности электрического поля непрерывного излучения на частоте ω_0:

$$E(x,\rho) = \frac{U_0G_0a^2\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \left(1 + i\Omega_0\frac{x}{F}\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{e}^{-i\kappa\rho} \times$$

$$\times \exp\left\{-\kappa^2 \frac{a^2}{2\left[1 + i\Omega_0(x/F)\right]}\right\} \exp\left[ix(k_0^2 - \kappa^2)^{1/2}\right], \quad (9)$$

где $\Omega_0 = k_0a^2/x$; $k_0 = \omega_0/c$.

Если квадратная скобка в последней экспоненте в (8) положительна, т.е.

$$k^2 > \kappa^2, \qquad (10)$$

то мы имеем бегущие волны, переносящие энергию в положительном направлении оси x. При равенстве этой скобки нулю переноса энергии вдоль оси x не происходит, а при ее отрицательных значениях мы получим неоднородные волны, экспоненциально затухающие по мере удаления от плоскости $x = 0$ [10].

Таким образом, с физической точки зрения представляют интерес лишь результаты, которые получаются при выполнении условия (10), означающего, что вклад низких временных частот в интеграл (8) невелик. Это позволяет разложить квадратную скобку в последней экспоненте в (8) в ряд Тейлора и, считая условие (10) выполненным, ограничиться двумя первыми слагаемыми этого ряда. В результате приходим к формуле

$$E(x,\rho,t) = \frac{T}{i\sqrt{2\pi}} G_0U_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathrm{e}^{-i\omega t} \Omega \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}T^2\right] \times$$

$$\times \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\Omega_F} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a_g}\right)^2 \left[\frac{\Omega(x/F) - i}{\Omega\Omega_F}\right]\right\}, \qquad (11)$$

где $a_g = x/(ka)$; $\Omega_F = 1 - i\Omega(1 - x/F)$, соответствующей параболическому приближению волнового уравнения [1, 10–12]:

$$2ik\frac{\partial E(x,\rho,t)}{\partial x} + \Delta_\perp E(x,\rho,t) +$$

$$+ k^2E(x,\rho,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,\rho,t) = 0; \qquad (11.a)$$

$\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — двумерный оператор Лапласа. Как и в случае полного волнового уравнения (1), можно убедиться путем подстановки, что выражение (11) удовлетворяет уравнению (11.a).

Для случая коллимированного пучка ($x/F = 0$) формула (11) приведена в [4] и может быть получена, как частный случай, из формул в работах [7, 8]. При $T \to \infty$ (11) переходит в хорошо известное выражение для напряженности поля непрерывного излучения на частоте ω_0 в параболическом приближении:

$$E(x,\rho,t) = \frac{\Omega_0}{i} G_0U_0 \frac{\mathrm{e}^{-i\omega_0 t + ik_0 x}}{\Omega_{F_0}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a_{g_0}}\right)^2 \frac{\Omega_0(x/F) - i}{\Omega_0\Omega_{F_0}}\right], \qquad (12)$$

где

$$a_{g_0} = \frac{x}{k_0a}; \quad \Omega_{F_0} = 1 - i\Omega_0\left(1 - \frac{x}{F}\right).$$

Из (12) для интенсивности электрического поля $I(x,\rho) = \left|E(x,\rho,t)\right|^2$ получим

$$I(x,\rho) = G_0^2U_0^2\left(\frac{a}{\rho_d}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\rho_d}\right)^2\right], \qquad (13)$$

где $\rho_d = a\left[(1 - x/F)^2 + \Omega_0^{-2}\right]^{1/2}$ — радиус гауссова пучка непрерывного излучения на частоте ω_0 в однородной среде, определяемый по спаданию интенсивности пучка в поперечной плоскости до уровня

e^{-1}, или, иными словами, дифракционный радиус пучка [11, 12].

Чтобы получить выражение для поля импульсного пучка «нулевой» длительности, зададим $G(t)$ в виде δ-импульса:

$$G(t)=\frac{G_0\sqrt{2\pi}\,T}{\sqrt{2\pi}\,T}\exp\left\{-\frac{t^2}{2T^2}\right\}e^{-i\omega_0 t}=\sqrt{2\pi}\,G_0T\delta(t)\,e^{-i\omega_0 t},$$

и отнормируем его на $\sqrt{2\pi}T$, чтобы спектр $P(\omega)$ представлял собой ненулевое равномерное распределение во всей полосе частот $P(\omega)=\frac{1}{2\pi}G_0$. С учетом этой нормировки для напряженности поля $\tilde{E}(x,\rho,t)=$ $=E(x,\rho,t)/(\sqrt{2\pi}T)$ из (11) имеем

$$\tilde{E}(x,\rho,t)=\frac{G_0U_0}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\frac{\Omega}{\Omega_F}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a_g}\right)^2\left[\frac{\Omega(x/F)-i}{\Omega\Omega_F}\right]\right\}. \qquad (14)$$

В случае сфокусированного в плоскость наблюдения пучка ($x/F=1$) интегралы в (11) и (14) вычисляются аналитически, и в [9] показано, что при длительности импульса $T\to 0$ сфокусированный в плоскость наблюдения пучок не испытывает дифракции, его амплитуда в фокусе неограниченно растет. В общем же случае произвольных соотношений между радиусом кривизны фазового фронта пучка F и длиной трассы x интегралы в (11) и (14) аналитически вычислить невозможно. Более того, с уменьшением длительности импульса интеграл в (11) начинает плохо сходиться, а для δ-импульса интеграл в (14) вообще расходится.

2. Асимптотический анализ

Рассмотрим интеграл в (14) более подробно. Разобьем пределы интегрирования на три участка: $[-\infty, -C]$, $[-C, +C]$ и $[C, \infty]$. Константа C выбирается такой, чтобы параметр $\Omega=ka^2/x=\omega a^2/cx$ принимал значения $\Omega\gg 1$ при $\omega<-C$ и $\omega>C$. Тогда при условии $x/F\neq 1$, $\Omega\gg 1$ (14) в области интегрирования $[C,\infty]$ можно представить в виде

$$\tilde{E}(x,\rho,t)=\frac{G_0U_0}{2\pi\left(1-\frac{x}{F}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho/\left(a(1-x/F)\right)\right]^2\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{C}^{\infty}d\omega\,\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-i\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\Omega\frac{x}{F}\left(1-\frac{x}{F}\right)^{-1}\right]. \quad (15)$$

Откуда для коллимированного пучка ($x/F=0$) получаем

$$\tilde{E}(x,\rho,t)=\frac{G_0F_0}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right]\int\limits_{C}^{\infty}d\omega\,\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]. \quad (16)$$

То есть интегрирование по области высоких положительных частот показывает, что дифракционного расплывания δ-импульса коллимированного пучка не происходит, он сохраняет свой начальный размер. Это легко видеть, если отнормировать в (16) амплитуду $\tilde{E}(x,\rho,t)$ на ее значение на оси пучка при $\rho=0$. Точно такой же результат получается при интегрировании по области $[-\infty, -C]$.

Из (15) следует, что и при произвольных соотношениях между радиусом кривизны волнового фронта пучка F и длиной трассы x интегрирование по областям $[-\infty, -C]$ и $[C, \infty]$ приводит к таким же результатам, что и для коллимированного пучка: дифракционного расплывания пучка не происходит, его размеры на расстоянии x полностью определяются геометрией распространения (отношением x/F) и начальным радиусом a. Нормированная амплитуда в этом случае определяется выражением

$$E_N(x,\rho,t)=\frac{\tilde{E}(x,\rho,t)}{\tilde{E}(x,0,t)}=$$

$$=\mathrm{const}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho/\left(a(1-x/F)\right)\right]^2\right\}, \qquad (17)$$

поскольку интегральные сомножители в выражениях для $\tilde{E}(x,\rho,t)$ и $\tilde{E}(x,0,t)$ имеют один и тот же порядок стремления к бесконечности и их отношение дает константу. Остается вычислить интеграл (14) в пределах $[-C, C]$, чтобы сделать заключение о дифракции широкополосных δ-импульсных пучков.

На рис. 1 представлены результаты расчета нормированной амплитуды поля $E_N(x,\rho,t)$ на основе формулы (14) с интегрированием от $-C$ до C при $t=x/c$ и $x/F=-1$, $x/F=2$.

Значение C задавалось равным 10. Для наглядности изображены распределения нормированных амплитуд и их огибающие (рис. 1). Из результатов расчета следует, что огибающие нормированных амплитуд поля E_N убывают в поперечной плоскости до уровня e^{-1} (до 0,3679 по оси ординат) на расстояниях от оси пучка, равных $\rho/a=2\sqrt{2}$ (2,8320 по оси абсцисс) при $x/F=-1$ и $\rho/a=\sqrt{2}$ (1,4142 по оси абсцисс) при $x/F=2$ соответственно.

Точно такие же результаты следуют из формулы (17), определяющей нормированную амплитуду поля $E_N(x,\rho,t)$ в отсутствие дифракции. То есть и численное оценивание интеграла (14) в пределах $[-C, C]$ показывает, что дифракционное расплывание δ-импульсного пучка отсутствует.

Таким образом, как при фокусировке излучения в плоскость наблюдения $x/F=1$ [9], так и при произвольных соотношениях между радиусом кривизны волнового фронта и длиной трассы ($x/F\neq 1$) дифракции широкополосных δ-импульсных пучков не происходит.

Ниже представлены результаты численных расчетов по формулам (8) и (11) нормированной интенсивности поля гауссовых пучков импульсного