МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДИФРАКЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Учебно-методическое пособие

Составители:
А.В. Зюльков,
А.В. Захаров

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

СОДЕРЖАНИЕ

$$B(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = B\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \equiv B(s, \tau).$$

Спектры однородных и стационарных пространственно-временных случайных полей. Обратимся теперь к спектральным представлениям для стационарных и однородных случайных полей. Аналогом временного случая здесь будет разложение по плоским волнам (см. далее):

$$E(\vec{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega, \vec{k}) e^{i((\omega t - \vec{k}\vec{r})} d\omega d\vec{k}, \qquad (2)$$

$d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$, $\vec{k}$ – волновой вектор. Величины $\varepsilon(\omega, \vec{k})$ мы будем называть спектральными амплитудами пространственно-временного случайного поля. Амплитуды $\varepsilon(\omega, \vec{k})$ по-разному зависят от ω и $\vec{k}$ в разных реализациях случайного поля, т. е. $\varepsilon(\omega, \vec{k})$-случайные функции ω и $\vec{k}$, а правая часть выражения (2) представляет собой стохастический интеграл. Возможность разложения случайных функций в ряд Фурье и смысл получающихся соотношений достаточно подробно обсуждаются, например, в [2].

Введем понятие *энергетического спектра* (спектра мощности) пространственно-временного случайного поля и установим его связь с корреляционной функцией. Записывая выражение для корреляционной функции $B(s,\tau)$ с помощью (2), из требования однородности и стационарности случайного поля получим

$$\langle \varepsilon(\omega,\vec{k})\varepsilon^*(\omega,\vec{k})\rangle = G(\omega, \vec{k})\delta(\omega - \omega')\delta(\vec{k} - \vec{k}'), \qquad (3)$$

где $G(\omega, \vec{k})$ имеет смысл спектра мощности пространственно-временного случайного поля, $G(\omega, \vec{k}) \geq 0$. Отсюда непосредственно следуют соотношения, являющиеся обобщением формул для временного случая (теоремы Винера-Хинчина)

$$B(\vec{s}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \vec{k})\, e^{i(\omega\tau - \vec{k}\vec{s})} d\omega d\vec{k},\quad G(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau, \vec{s}\,)\, e^{-i(\omega\tau - \vec{k}\vec{s})} d\tau\, d\vec{s}. \qquad (4)$$

В этих выражениях пространственно-временная корреляционная функция и спектр случайного поля записаны в общем виде. При этом временной ход корреляционной функции зависит от пространственных координат $\vec{s}$ и, наоборот, пространственные корреляции изменяются со временем τ. Вместе с тем имеется класс задач статистической радиофизики и оптики, когда временную зависимость поля во всех точках пространства можно считать практически одинаковой. Тогда можно записать

$$E(\vec{r}, t) = F(\vec{r}) f(t), \quad B(\vec{s}, \tau) = B_F(\vec{s}) B_f(\tau).$$

Случайные поля, имеющие корреляционную функцию приведенного вида, иногда называют спектрально «чистыми» полями. Вообще говоря, второе приведенное условие слабее, чем первое.

Кроме того, существует специальный вид полей с так называемыми «замороженными» неоднородностями, когда напряженность электрического поля $E(\vec{r},t)=E(\vec{r}-\vec{v}t)$, где $\vec{v}$ – скорость перемещения неоднородностей. В этом случае корреляционная функция поля, очевидно, равна $\mathrm{B}(\vec{\mathrm{s}},\tau)=B(\vec{\mathrm{s}}-\vec{v}\tau)$, т. е. пространственные и временные корреляции поля полностью взаимосвязаны между собой.

Структурная функция. Локально однородные и локально изотропные случайные поля. Структурная функция случайного поля $E(\vec{r},t)$ определяется следующим образом:

$$D(\vec{r}_1,\mathrm{t}_1,\vec{r}_2,\mathrm{t}_2)=\left\langle |\overset{\circ}{E}(\vec{r}_2,\mathrm{t}_2)-\overset{\circ}{E}(\vec{r}_1,\mathrm{t}_1)|^2\right\rangle, \tag{5}$$

т.е. представляет собой дисперсию приращений $\overset{\circ}{E}(\vec{r},t)$, где $\overset{\circ}{E}(\vec{r},t)=E(\vec{r},t)-<E(\vec{r},t)>$ – центрированное случайное поле. Она позволяет исключить из рассмотрения регулярные и крупномасштабные неоднородности поля.

Рассмотрим зависимость функции от пространственных координат в совпадающие моменты времени $t_1=t_2=t$. Опуская для удобства записи зависимость от t и считая для простоты, что $<E(\vec{r})>=0$, имеем $D(\vec{r}_2,\vec{r}_1)=\left\langle |E(\vec{r}_2)-E(\vec{r}_2)|^2\right\rangle$.

Случайное поле называется *локально однородным*, если $D(\vec{r}_2,\vec{r}_1)=D(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=D(\vec{\mathrm{s}})$. В случае $D(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=D(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)=D(\mathrm{s})$ поле называется *локально изотропным*. Понятия локальной однородности и локальной изотропности поля для структурной функции аналогичны понятиям однородности и изотропности поля для корреляционной функции.

Когерентность. Полностью и частично когерентные поля. В оптике с коррелированностью случайных полей связывают понятие *когерентности*. Определим нормированную корреляционную функцию следующим образом

$$\gamma(\vec{\mathrm{r}}_2,\vec{\mathrm{r}}_1,t_2,t_1)=\frac{B(\vec{\mathrm{r}}_2,\vec{\mathrm{r}}_1,t_2,t_1)}{[<I(\vec{\mathrm{r}}_1,t_1)><I(\vec{\mathrm{r}}_2,t_2)>]^{1/2}}, \tag{6}$$

где $<I(\vec{\mathrm{r}},t)>=B(\vec{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{r}},t,t)$ – средняя интенсивность поля. Для стационарных полей

$$\gamma(\vec{\mathrm{r}}_2,\vec{\mathrm{r}}_1,\tau=t_2-t_1)=\frac{B(\vec{\mathrm{r}}_2,\vec{\mathrm{r}}_1,\tau)}{[<I(\vec{\mathrm{r}}_1)><I(\vec{\mathrm{r}}_2)>]^{1/2}}.$$

Величина γ называется *комплексной степенью когерентности*, поскольку корреляционная функция в общем случае комплексна. Абсолютную величину γ называют модулем степени когерентности или просто *степенью* *когерентности*. Нетрудно убедиться, что, как и коэффициент корреляции, степень когерентности удовлетворяет неравенству $|\gamma(\vec{r}_2,\vec{r}_1,t_2,t_1)|\le 1$. Модуль γ при $\tau=0$ дает значение степени пространственной когерентности, а при $\vec{r}_1=\vec{r}_2$ – значение степени временной когерентности.

Определенное значение степени когерентности $|\gamma|$ является локальной характеристикой поля для заданных точек пространства с координатами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Поля с $|\gamma(\vec{r}_2,\vec{r}_1,t_2,t_1)|=1$ для любых значений аргументов называются полностью когерентными. Если $|\gamma(\vec{r}_2,\vec{r}_1,t_2,t_1)|=0$, то значения полей в разных пространственно-временных точках становятся некоррелированными, а для гауссовских полей и статистически независимыми. Такие поля называются некогерентными. Промежуточные значения соответствуют частично (или не полностью) когерентным полям.

Двумерное изотропное случайное поле. Случайная волна. Для радиофизики и оптики первоочередной интерес представляет специальный вид случайных полей – случайные волны.

Общие формулы, записанные выше для случайных полей, мы конкретизируем для случайных волн. Рассмотрение начнем с волны, близкой к регулярной плоской монохроматической волне

$$E(\vec{r},z,t)=\mathrm{A}(\vec{r})\exp[i(\omega_0 t-k_0 z)]. \qquad (7)$$

Соотношение (7) описывает волну, распространяющуюся вдоль оси Oz; будем считать, что комплексная амплитуда волны $A(\vec{r})$ случайным образом зависит только от радиуса-вектора $\vec{r}$, лежащего в плоскости, перпендикулярной оси Oz. Волну типа (7) можно рассматривать как «искаженную» плоскую волну. Поле вида (7) возникает, если идеальную плоскую монохроматическую волну пропустить через безграничный плоский экран, прозрачность и фазовый набег в котором случайным образом меняются от точки к точке.

Рассматриваемую волну можно характеризовать поперечной пространственной корреляционной функцией комплексной огибающей $B_\perp(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=<\mathrm{A}(\vec{r}_1)\mathrm{A}^*(\vec{r}_2)>$. Соотношения справедливые для величин, связанных преобразованием Фурье, позволяют установить связь между характерным масштабом изменения пространственной корреляционной функции - радиусом корреляции r_k и эффективной шириной Δk волнового (углового) спектра изотропного случайного поля, аналогичное временному случаю:

$$\Delta k\cdot r_k\sim 1. \qquad (8)$$

Световые пучки. Поперечная и продольная корреляция. Волна вида (7) со статистически однородной комплексной амплитудой является идеализированной моделью. Более реальная модель ограниченного в пространстве светового пучка описывается следующим соотношением

$$E(\vec{r},z,t)=\mathrm{A}(\vec{r},z,t)\exp[i(\omega t-k_0 z)]=\rho(\vec{r},z,t)\exp[i(\omega t-k_0 z+\varphi(\vec{r},z,t))]. \qquad (9)$$